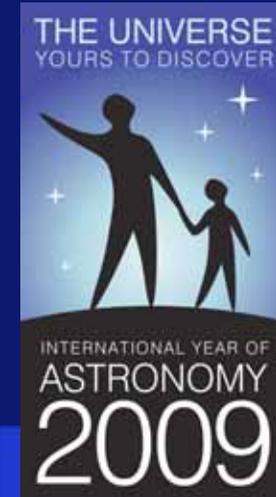


Una Universidad, Un Universo

Mecánica Celeste.
El problema de n-cuerpos,
misiones espaciales
y nuevos sistemas planetarios.



http://www.nasa.gov/images/content/63114main_highway_med.jpg

animation (by Cici Koenig)

Sebastián Ferrer

Dpto. Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



4 Junio 2009

Si muchos de los más grandes matemáticos -Euler, Gauss, Lagrange, Riemann, Poincaré, Hilbert, Birkhoff, Atiyah, Arnold, Smale- han sido expertos en mecánica, y además muchos de los avances en matemáticas usan ideas de la mecánica de modo esencial ¿por qué ya no está en el plan de estudios de Matemáticas?

Anónimo

Lectures on Mechanics, 1997 (prefacio)

J.E. Marsden

Control and Dynamical Sstems

California Institute of Technology

Mecánica Celeste: Tres etapas

1609 - : Problema n-cuerpos

-Matemáticas

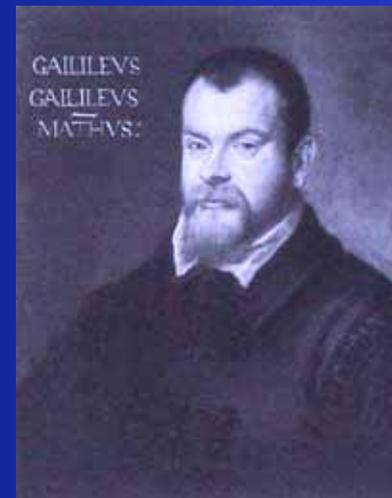
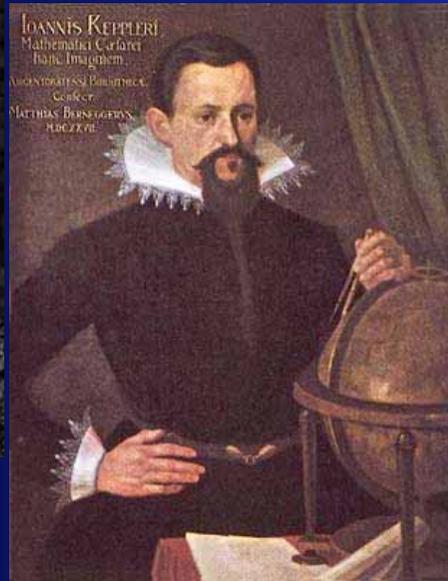
1957 - : Misiones espaciales

-Tecnología y computación

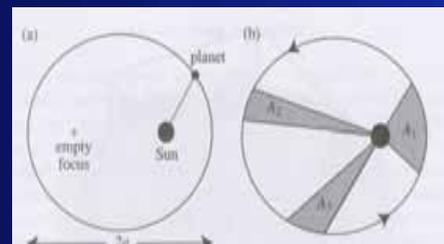
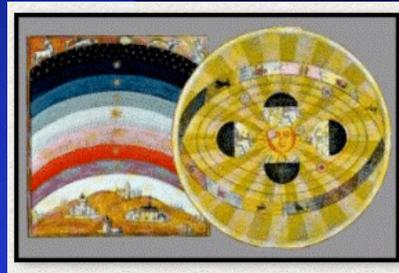
1995 - : Nuevos sistemas planetarios

*-Astronomía y astrobiología
-y de nuevo los n-cuerpos*

del sistema geocéntrico al problema de n cuerpos



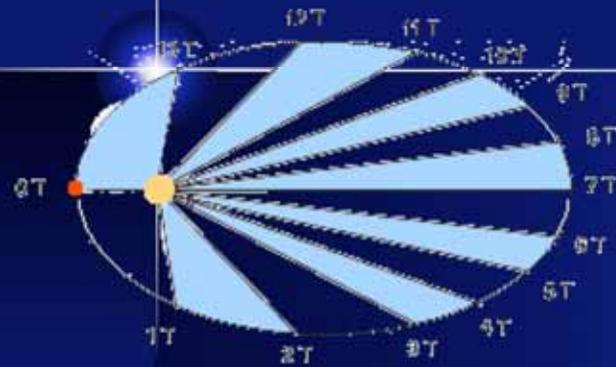
Retrato de Galileo a los 42 años, obra de Domenico Robusti.



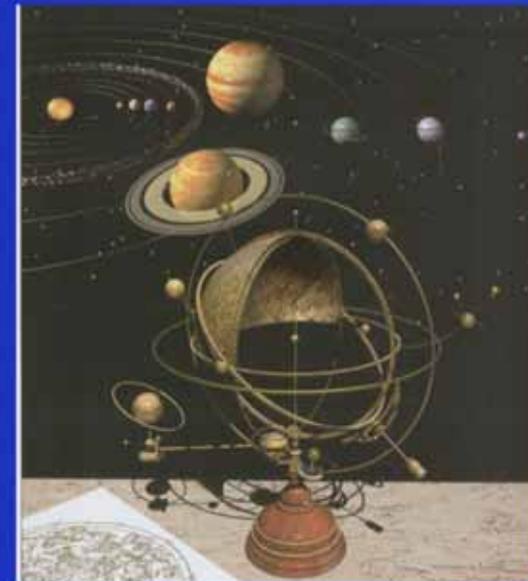
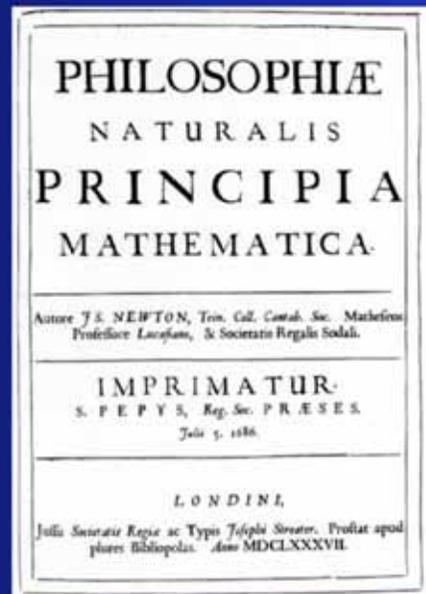
$$\ddot{r} = -G \frac{M}{r^2}$$

El sistema solar y la mecánica celeste

de la elipse de Kepler al problema de n-cuerpos



T = any unit of time (hour, day, week, etc.)



¡modelos y soluciones aproximadas!

El sistema solar y 'el problema' de n cuerpos*

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = G \sum_{j=1}^N \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$$

$$(j \neq k), r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$$

- m_k / m_j arbitrario
- $n = 2$, el sistema diferencial tiene solución
 - Integrales, cónicas y ecuación de Kepler
- n mayor o igual que 3: el sistema no ha sido integrado

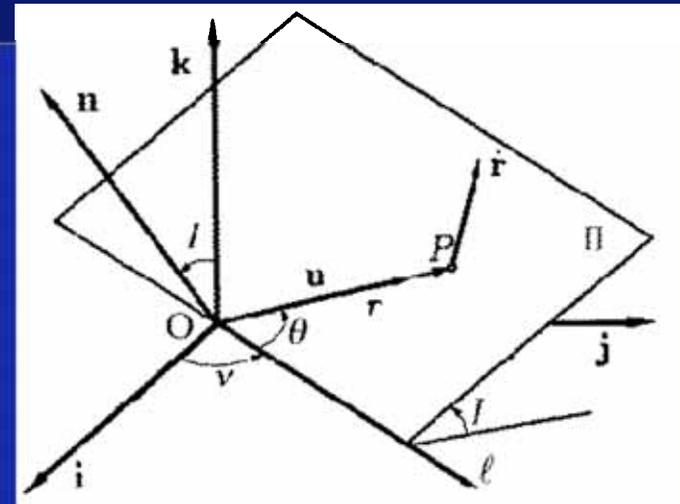
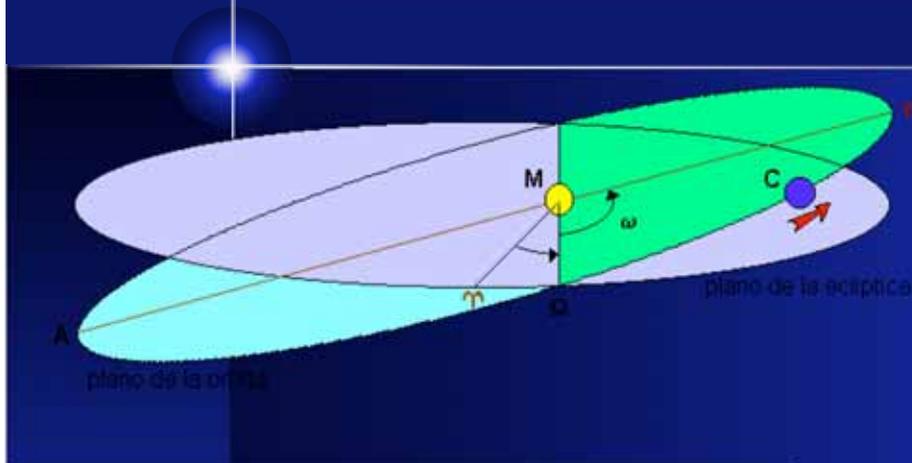
Sistemas planetarios:

$$m_i / m_o \ll 1 \quad (\text{S. Solar: } m_i / m_o < 0.001)$$

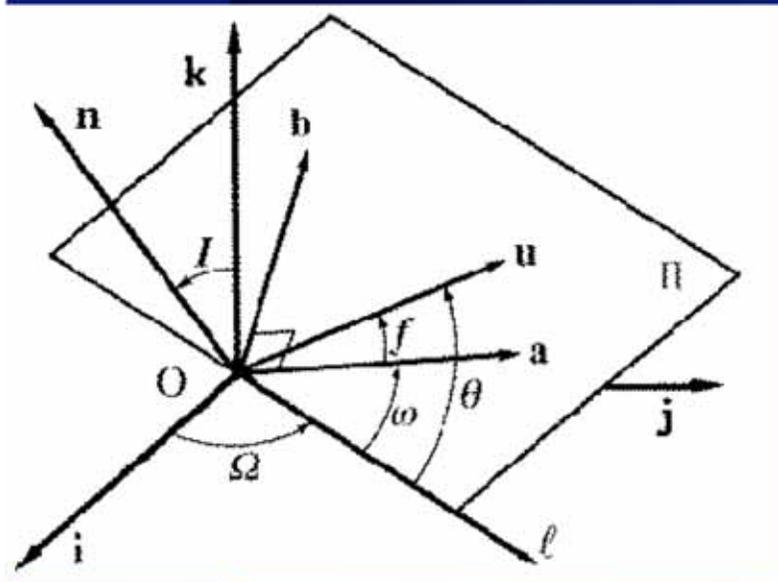
Trayectorias quasi elípticas : teoría de perturbaciones

*masas m_i "puntuales"

La órbita en el espacio y variables angulares



Variables nodales-polares: r, v, θ



Elementos orbitales: $a, e, I, \Omega, \omega, f$

a : semieje mayor

e : excentricidad

ángulos:

-inclinación

-perigeo

-nodo

-anomalía verdadera

Mecánica Analítica

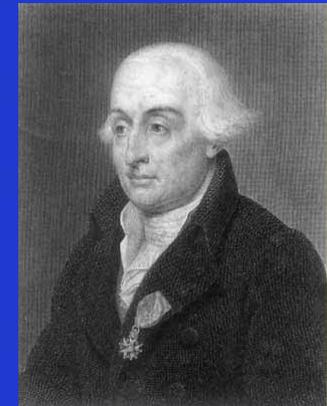


formulación Newtoniana: Ecs. 2° orden

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = G \sum_{j=1}^N \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$$

formulación Lagrangiana: Ecs. 2° orden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$



formulación Hamiltoniana : Ecs. primer orden

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_i}, \quad \dot{X}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

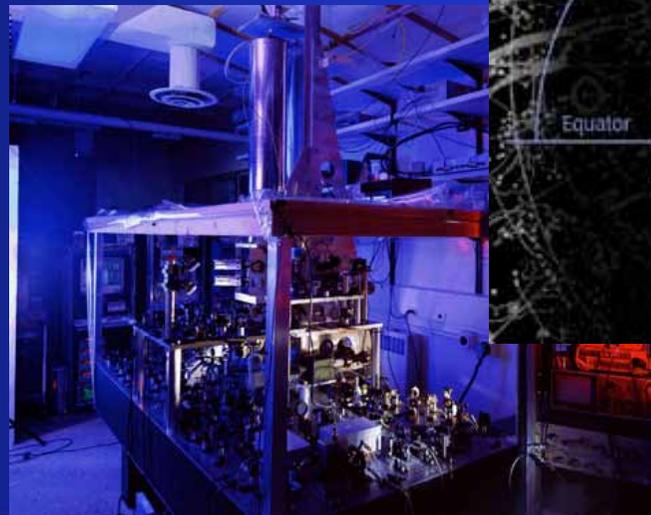
La variable independiente y su medida



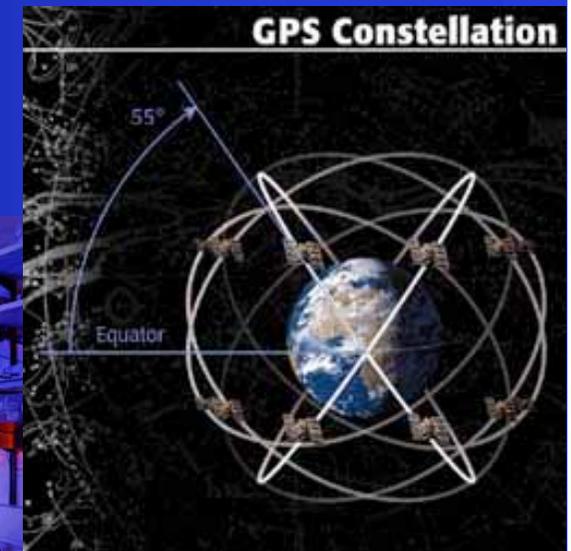
relojes de sol



Rotación
de la Tierra



Relojes atómicos



¿expresiones analíticas o soluciones numéricas?

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

| t | x | y | z |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| 0.00000 | 1.2554698 | -2.456987 | 3.7896541 |
| 0.00002 | 1.2556792 | -2.406352 | 3.7896542 |
| 0.00004 | 1.2558462 | -2.359973 | 3.7896543 |
| 0.00006 | 1.2560356 | -2.290038 | 3.7896544 |
| 0.00008 | 1.2562974 | -2.248462 | 3.7896545 |
| 0.00010 | 1.2565007 | -2.180033 | 3.7896546 |

Movimiento orbital de la Luna: teoría analítica



C. Delaunay
(1816 - 1872)



Vuelta a la Luna

Variables de Delaunay: (l, g, h, L, G, H)

de Delaunay a Marsden

GEOMETRIC DERIVATION OF THE DELAUNAY VARIABLES AND GEOMETRIC PHASES*

DONG EUI CHANG¹ and JERROLD E. MARSDEN²

¹*Mechanical and Environmental Engineering, University of California, Santa Barbara, CA 93106,
U.S.A., e-mail: dchang@engineering.ucsb.edu*

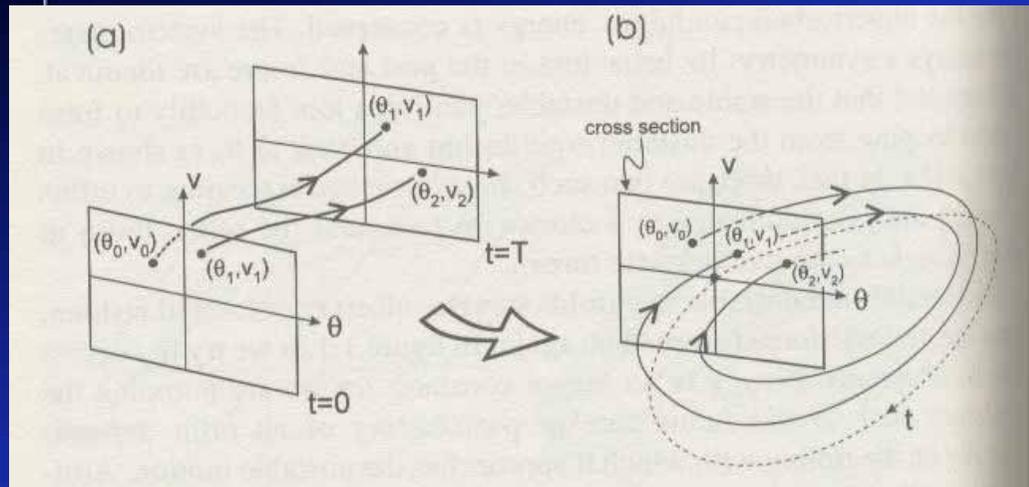
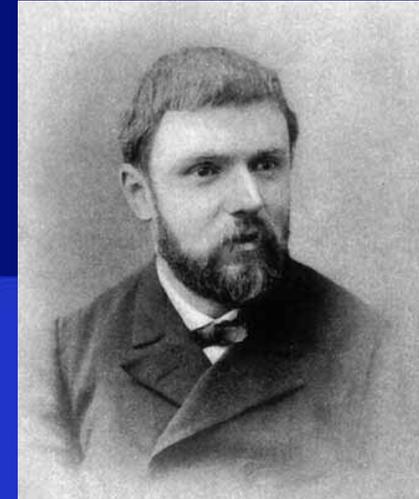
²*Control and Dynamical Systems 107-81, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125,
U.S.A., e-mail: marsden@cds.caltech.edu*

(Received: 20 December 2001; revised: 27 September 2002; accepted: 2 November 2002)

Dedicated to Klaus Kirchgässner on the occasion of his 70th birthday

Abstract. We derive the classical Delaunay variables by finding a suitable symmetry action of the three torus \mathbb{T}^3 on the phase space of the Kepler problem, computing its associated momentum map and using the geometry associated with this structure. A central feature in this derivation is the identification of the mean anomaly as the angle variable for a symplectic S^1 action on the union of the non-degenerate elliptic Kepler orbits. This approach is geometrically more natural than traditional ones such as directly solving Hamilton–Jacobi equations, or employing the Lagrange bracket. As an application of the new derivation, we give a singularity free treatment of the averaged J_2 -dynamics (the effect of the bulge of the Earth) in the Cartesian coordinates by making use of the fact that the averaged J_2 -Hamiltonian is a collective Hamiltonian of the \mathbb{T}^3 momentum map. We also use this geometric structure to identify the drifts in satellite orbits due to the J_2 effect as geometric phases.

'Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste'



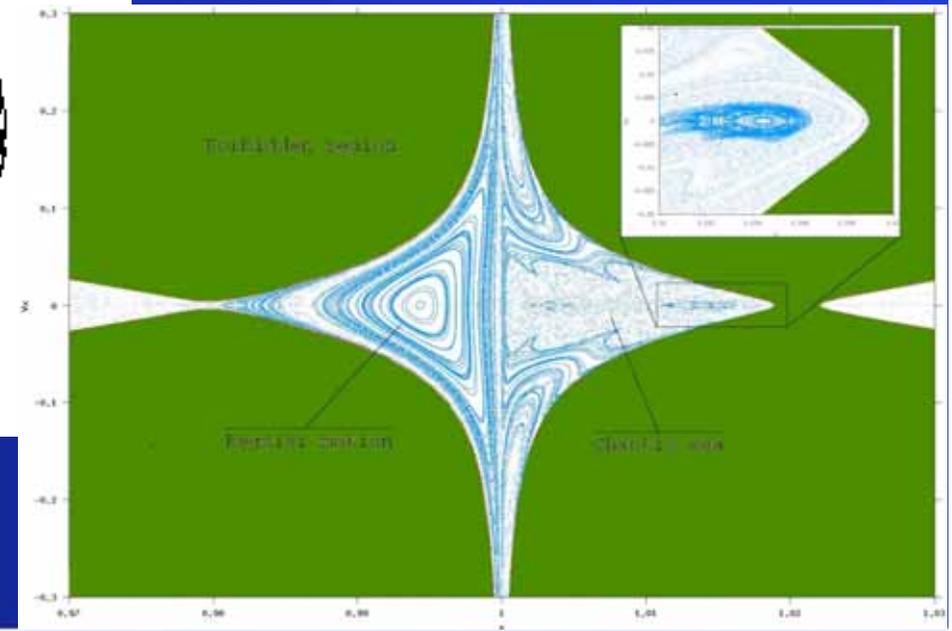
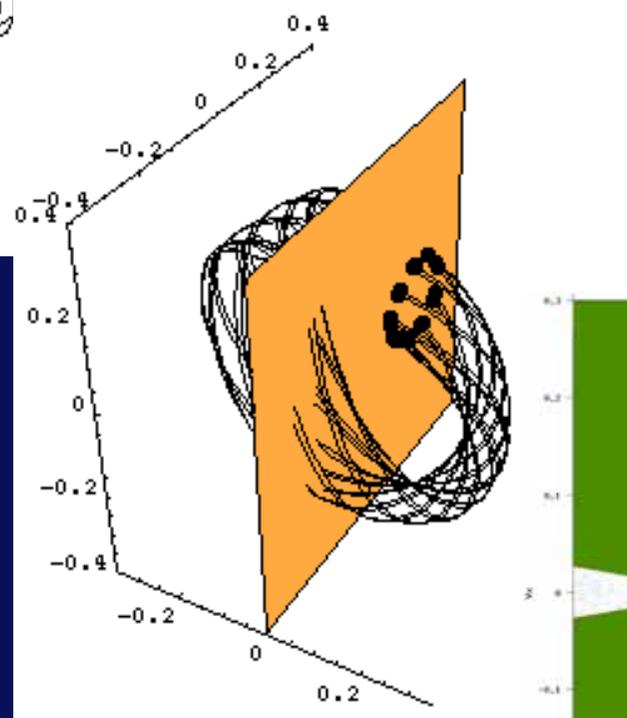
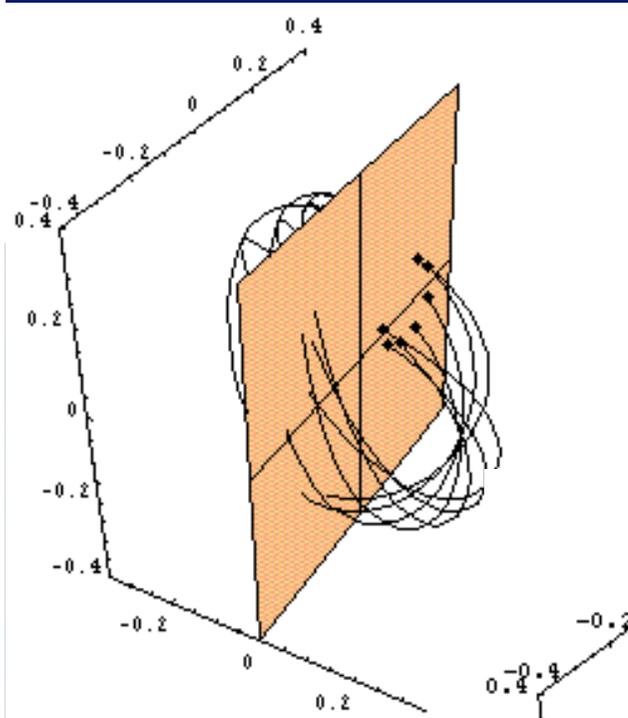
la superficie de
sección de Poincaré

Sistemas Hamiltonianos: sist. Keplerianos perturbados:

Sistema solar

$$\mathcal{H}(x, X) = \mathcal{H}_0(x, X) + \epsilon \mathcal{H}_1(x, X), \quad \epsilon \ll 1$$

Numérica: Superficies sección Poincaré



1954-63...: Teoría KAM y geometrización de la dinámica



Kolmogorov

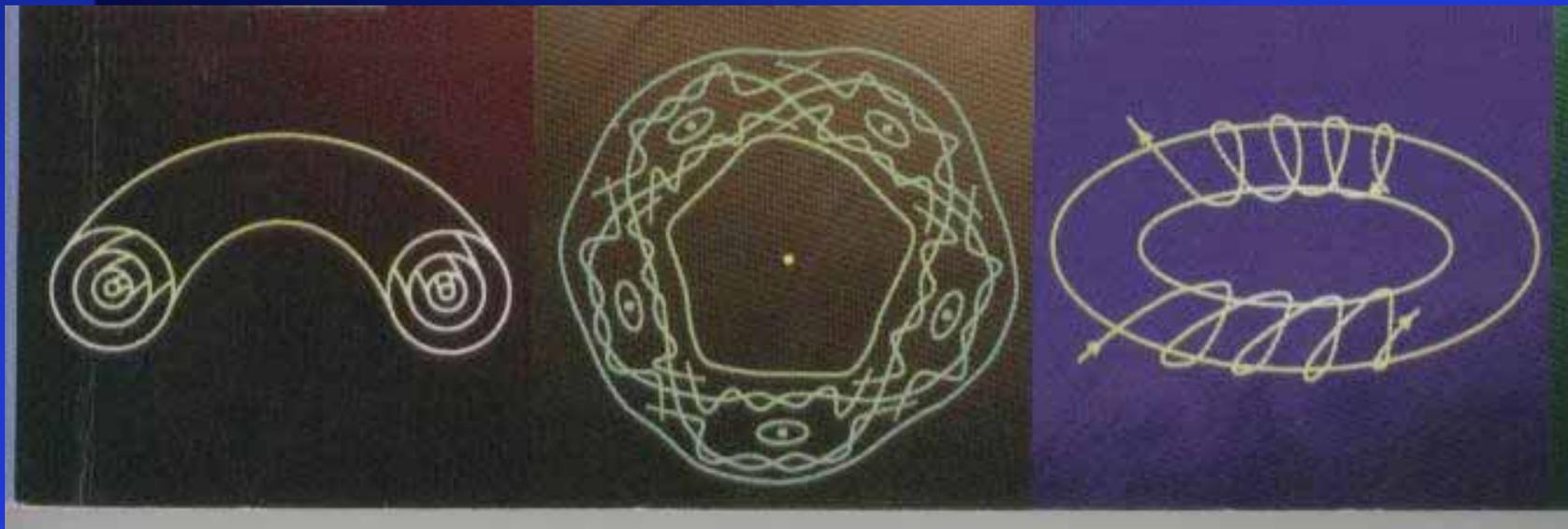


Arnold

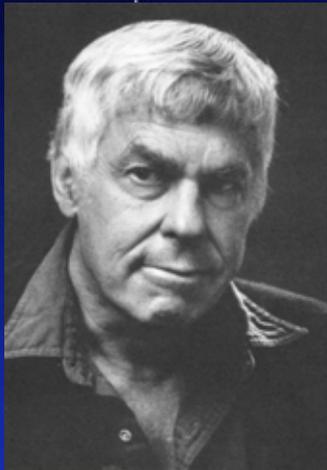


Moser

Los toros invariantes y sus perturbaciones

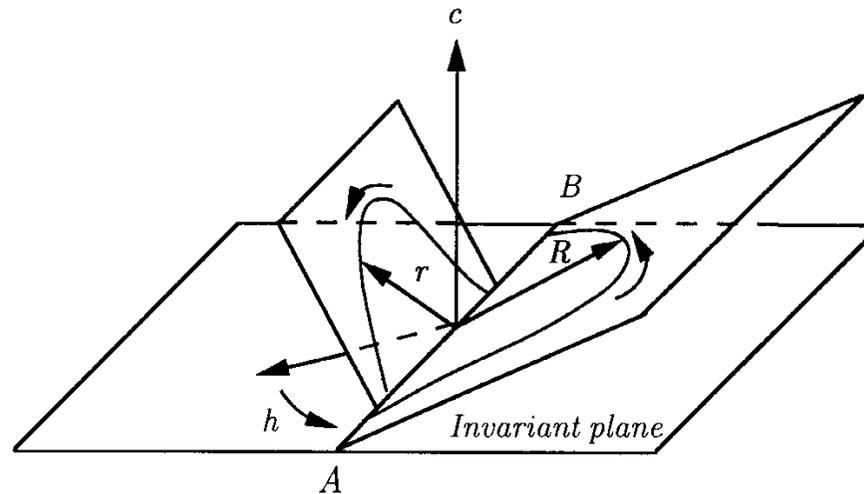


El problema de tres cuerpos, la reducción de Jacobi-Deprit y la geometrización de la Mecánica



Smale

2. HISTORICAL BACKGROUND



- c : total angular momentum vector
- AB : lines of nodes
- r : radius vector of inner orbit
- R : radius vector of exterior orbit
- h : longitude of the node of the inner orbit

Soluciones particulares

160 — Chapter 4

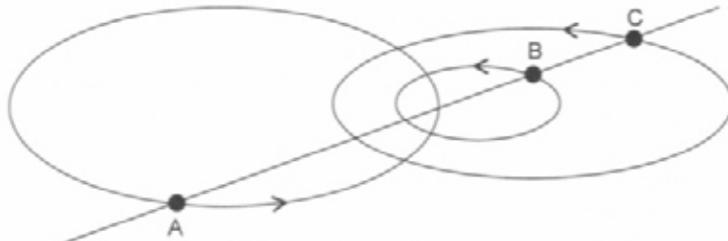


Figure 4.11. The Eulerian solutions of the three-body problem.

Euler ~ 1765

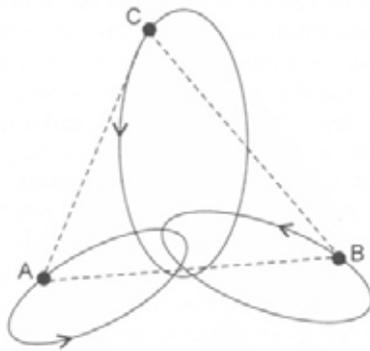


Figure 4.12. The Lagrangean solutions of the three-body problem.

Lagrange ~1772

Notices

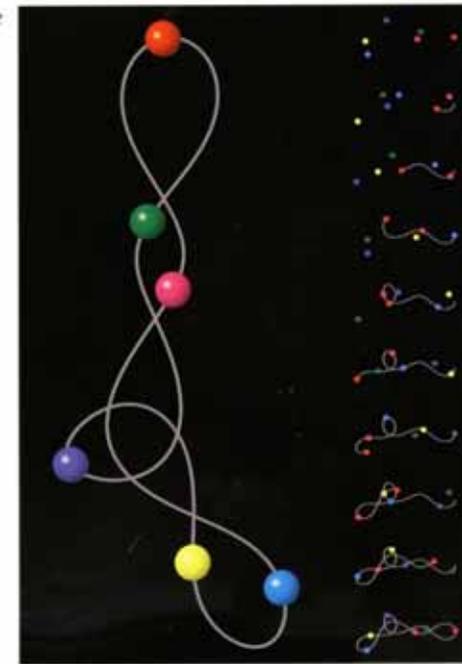
of the American Mathematical Society

May 2001

Volume 48, Number 5

A New Solution to the
Three-Body Problem
page 471

Thomas H. Wolff
(1954-2000)
page 482

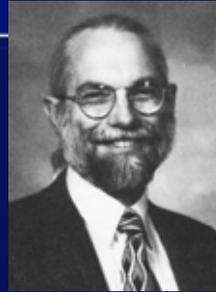


Choreography for Six Suns (see page 481)

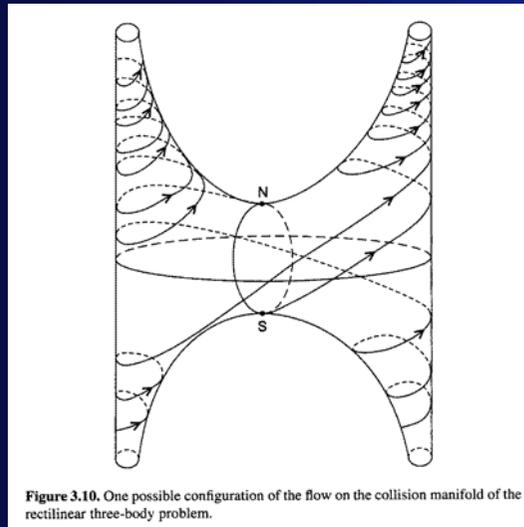
Chenciner-Montgomery 2001

<http://www.ai.mit.edu/people/wessler/halo//rmont.html>

Nuevas singularidades en el problema de n-cuerpos



McGehee



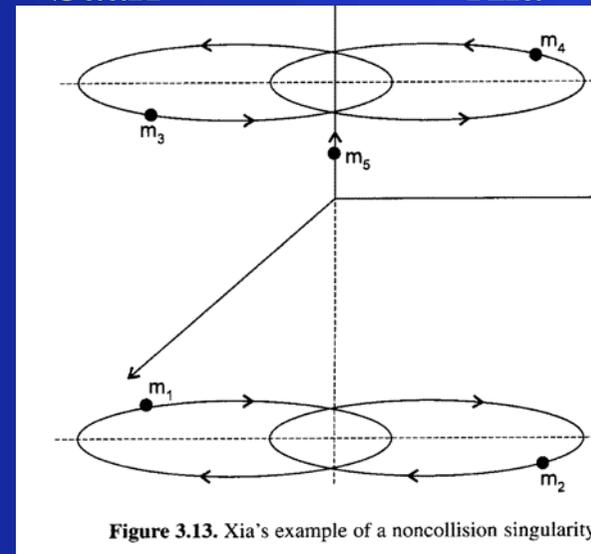
Variedad colisión euleriana, $n=3$



Saari



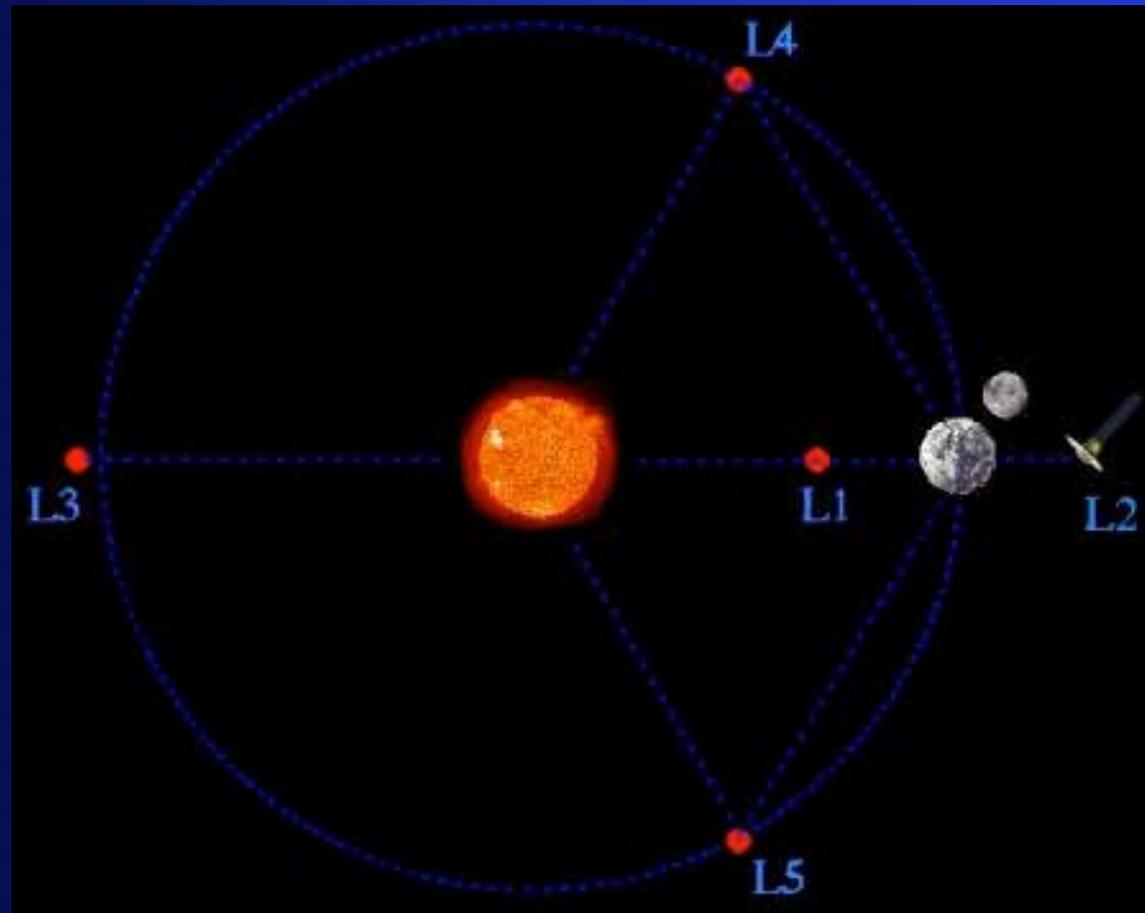
Xia



Singularidad sin colisión, $n=5$

Conjuntos de Cantor y singularidades con (sin) colisiones

Soluciones particulares del problema de tres cuerpos: equilibrios relativos



los puntos de Euler y de Lagrange

Simulaciones 2D n-cuerpos

Gravitation v5.0

Jeff Rommereide

Diseño de misiones espaciales

- Trayectorias espaciales:
 - Soluciones exactas “problema de n cuerpos”
 - Difíciles de conseguir, muchos cálculos
- Diseño de misiones espaciales
 - No es necesaria la solución exacta:
 - Soluciones aproximadas + maniobras correctoras
 - Fallo en una maniobra
 - Rediseñar la misión en poco tiempo
 - Requiere gran potencia de cálculo

¡El sistema solar ya no está en manos de los astrónomos!

Algunas websites con estudios del sistema solar:



European Space Agency



http://www.esa.int/SPECIALS/Cassini-Huygens/SEMD6E2VQUD_0.html



European Space Agency

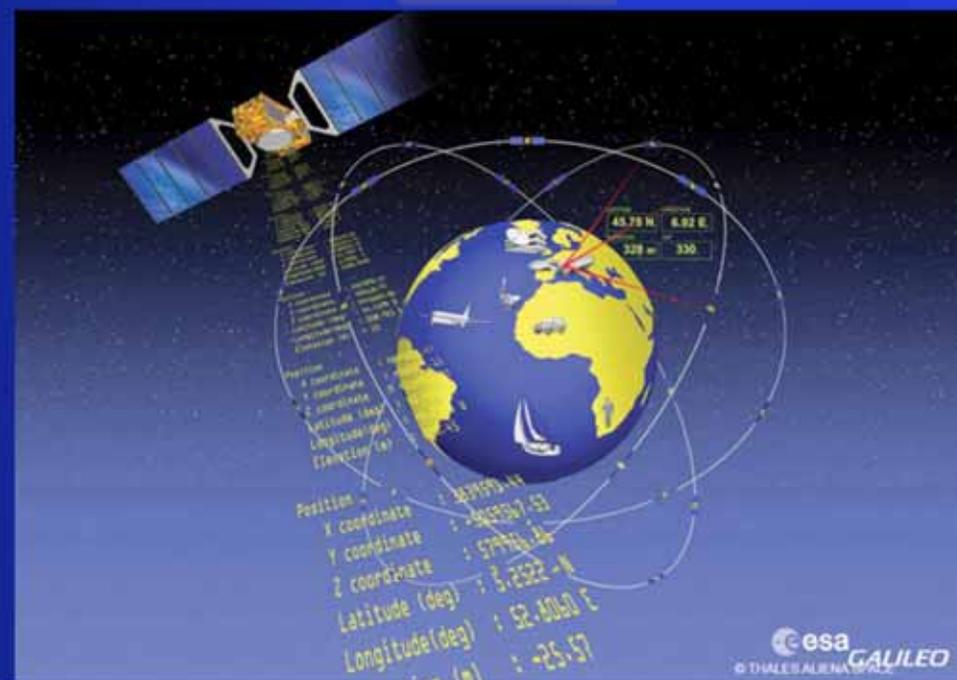
Demasiada información: vamos poco a poco!

Misiones: tipos

- Técnicas/comerciales
 - Comunicaciones
 - Radio, TV, GNSS, ...

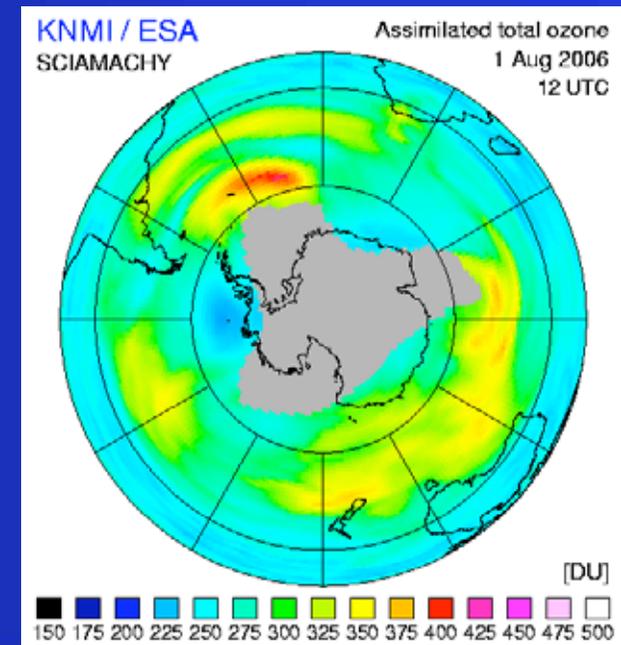


<http://www.orbital.com/images/high/Intelsat18.jpg>



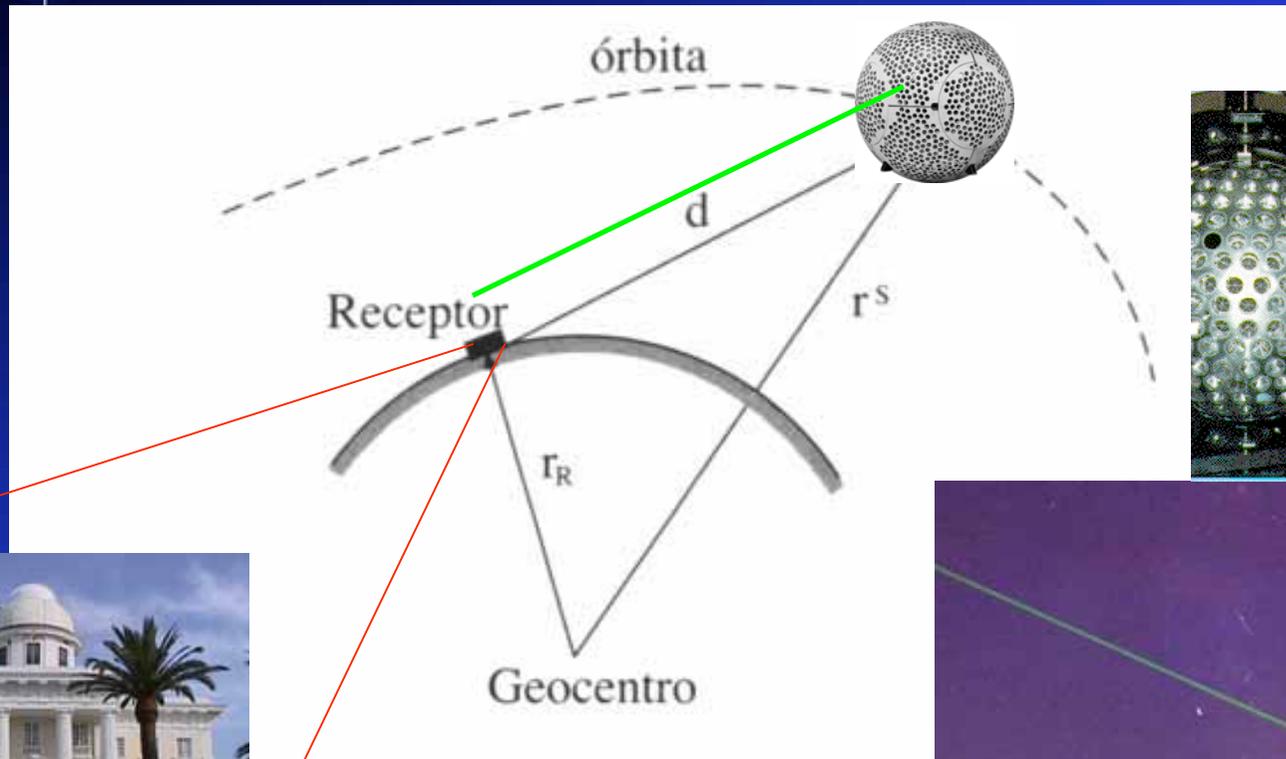
Misiones: tipos

- Técnicas/comerciales
- Científicas
 - Aumentar conocimiento
 - Proteger la Tierra
 - Capa ozono (Envisat, Aura)
 - Hielo polar (Icesat)
 - “El niño” (Topex)
 - Contaminación (Terra)

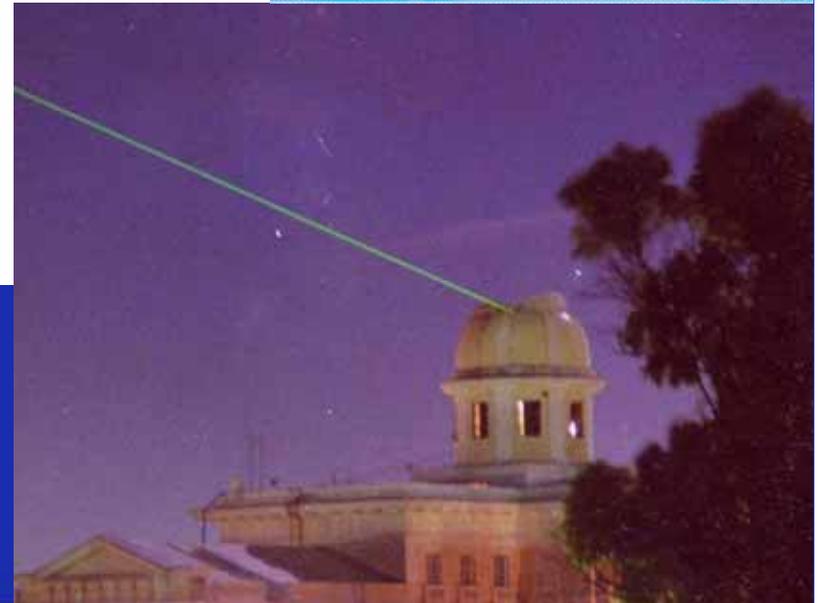


Satélites LAGEOS y ETALON

Más de 30 años estudiando la tectónica de placas



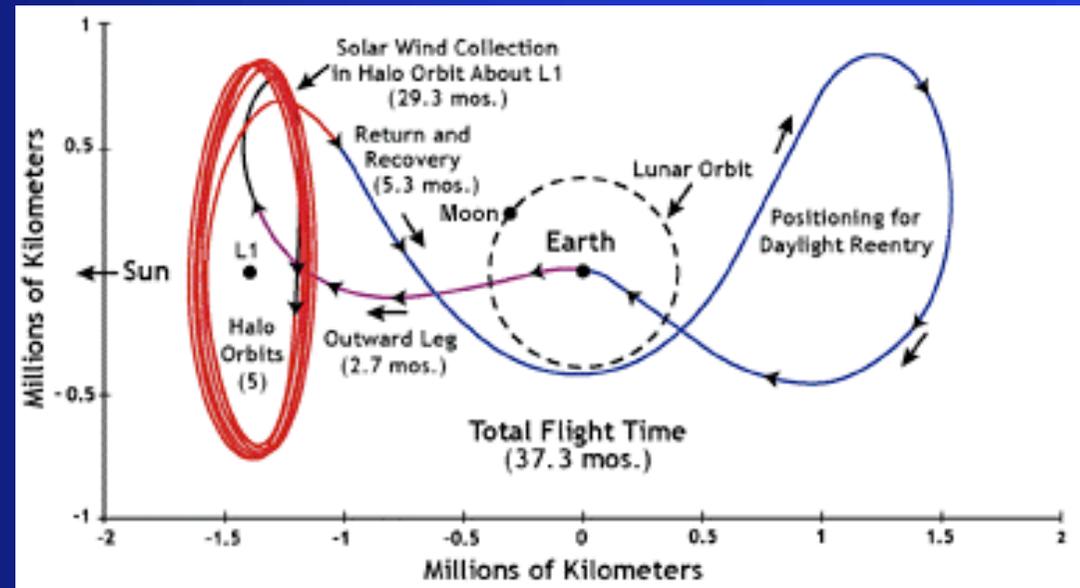
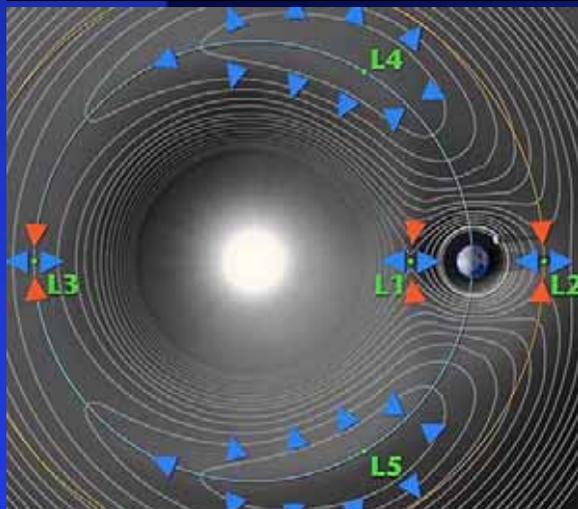
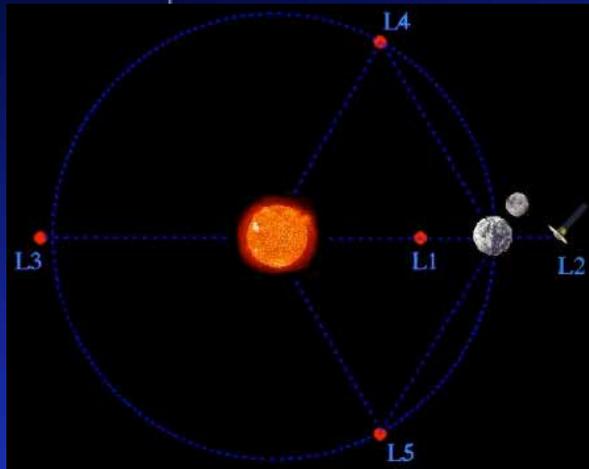
Telemetría láser

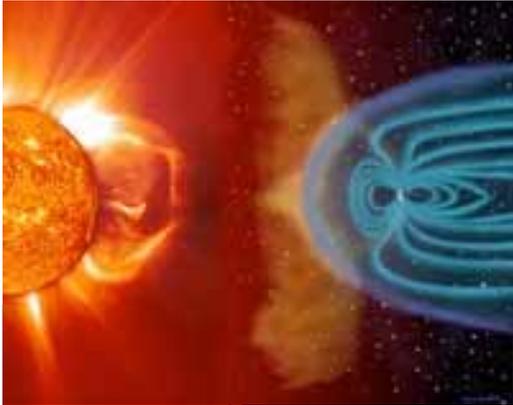




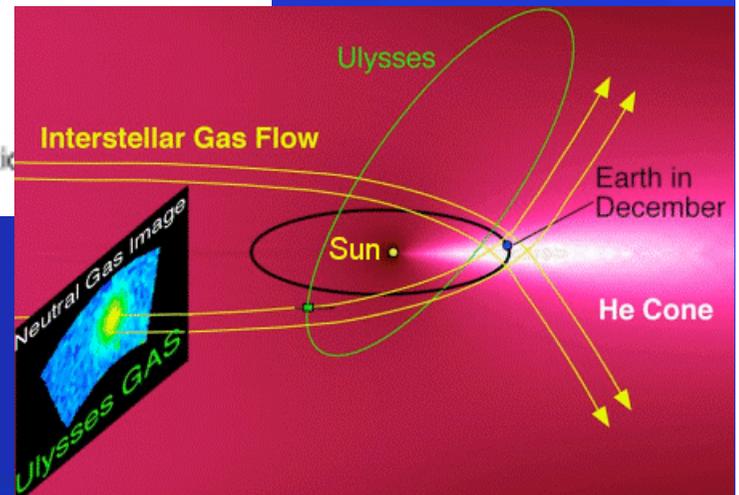
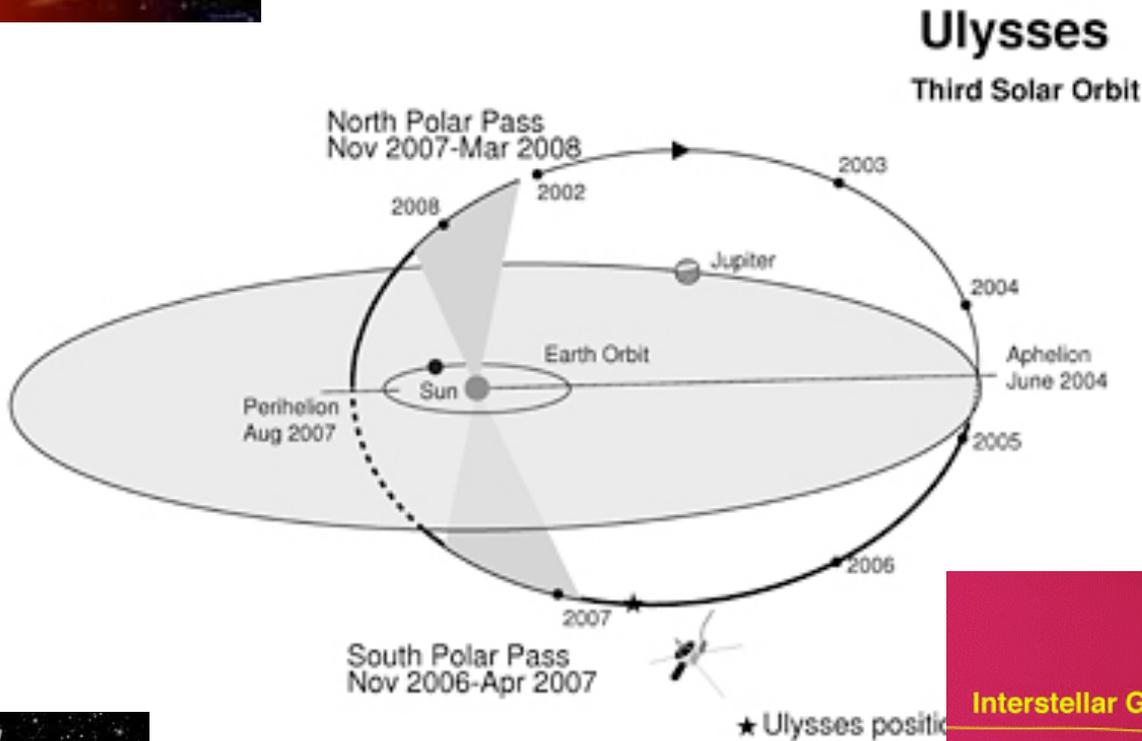
Recogiendo partículas solares

órbitas halo de L1: El proyecto Génesis





el Sol y Ulysses en órbita polar al sistema solar



Diseño de misiones espaciales

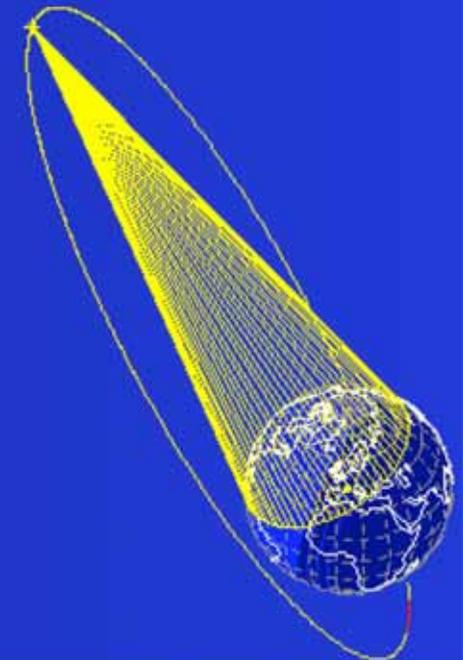
- Proceso que va de sencillo a complejo
 - Dos cuerpos, “intermediarios”
 - Dos cuerpos “perturbados”
- Diseño preliminar: modelos simples
 - Incluyen efectos dinámicos más importantes
 - Selección gama inicial de trayectorias
 - Análisis detallado en una fase posterior
- Optimización: modelos reales

Modelos sencillos

- Misiones a “puntos de libración” (~1970)
 - No pueden formularse mediante perturbaciones
 - Soluciones particulares
 - Soluciones de equilibrio, periódicas
 - Regiones de movimiento acotado, estabilidad
 - Variedades invariantes
 - Cálculo masivo con ordenador
 - Técnicas: analíticas, numéricas y gráficas
- Misiones a asteroides
 - Movimiento “caótico”

Ciencia y Tecnología: Astronomía y Astrodinámica

combinando excentricidad con inclinación



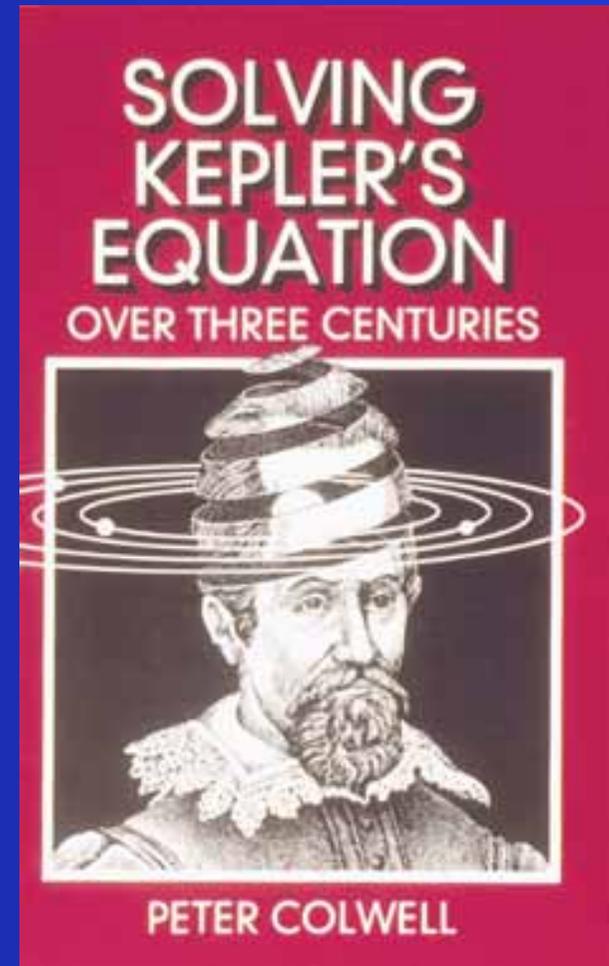
H&D

Leyes de Kepler & diseño de órbitas Molniya :

- llevando la educación a lugares remotos
- ¿satélites espías?

Dos cuerpos: efemérides

- ¿Problema solucionado?
 - ¡No!
- Hay que resolver la “ecuación de Kepler”
 - $n(t - t_0) = E - e \sin(E)$
- Ecuación implícita
 - Series infinitas
 - Soluciones gráficas
 - Cálculo iterativo



Dos cuerpos: insuficiente

<http://en.wikipedia.org/Vostok8K72>

- Modelo insuficiente
- Misiones rusas a la Luna
 - Impacto: 1958-1959
 - un fallo, un acierto
 - *Fly-by*: 1959-1960
 - fotografía lado oculto
 - Alunizajes: 1963-1966
 - falla 2 veces, se estrella 3
 - alunizaje en 1966
 - Orbitadores de la Luna
 - Rover (1970)



<http://www.svengrahn.pp.se/trackind/luna3/SimeizGroupSmall.jpg>

Problemas “perturbados”

$$\text{Energía: } \mathcal{H} = \frac{1}{2} v^2 - \frac{Gm}{r} - R(r, \theta, \lambda)$$

$$R = \frac{Gm}{r} \sum_{j \geq 2} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^j \left[C_{j,0} P_{j,0}(\sin \varphi) + \sum_{k=1}^j (C_{j,k} \cos k\lambda + S_{j,k} \sin k\lambda) P_{j,k}(\sin \varphi) \right]$$

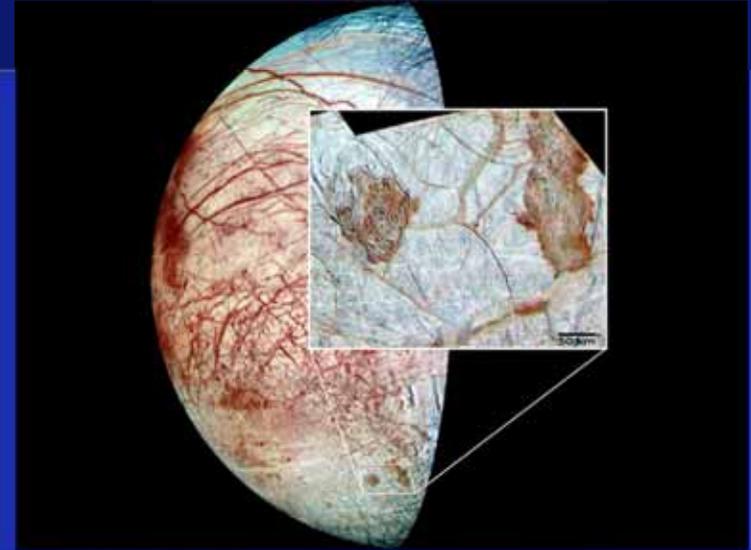
- Solución depende del tiempo
 - $a = a(t)$, $e = e(t)$, $I = I(t)$, ...
 - Modelos sencillos válidos para t corto
 - Modelos complejos válidas para t largo

Analítica o numérica

- Numérica: soluciones particulares
- Analítica: solución general
 - Fórmula dependiente de parámetros y el tiempo
 - Limitada a modelos relativamente sencillos
 - Solución aproximada
 - Promediada en el tiempo

Ejemplo: satélite Europa

- NASA Galileo (1989-2003)
 - Júpiter y galileanos (flyby)
- Estructura:
 - Corteza, manto, núcleo
- Corteza de hielo
 - Delgada y resquebrajada
- Océano salino
 - 100 km de profundidad
 - ¿Agua = vida extraterrestre?



<http://solarsystem.nasa.gov/galileo/gallery/images/top10-01.jpg>



http://www.nasa.gov/images/content/51488main_galileo_330x250.gif

Jupiter Icy Moons Orbiter

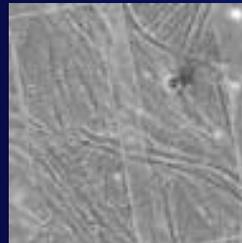
JIMO



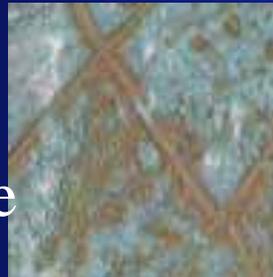
They may harbor vast oceans beneath their icy surfaces.
The mission would launch in 2015 or later.



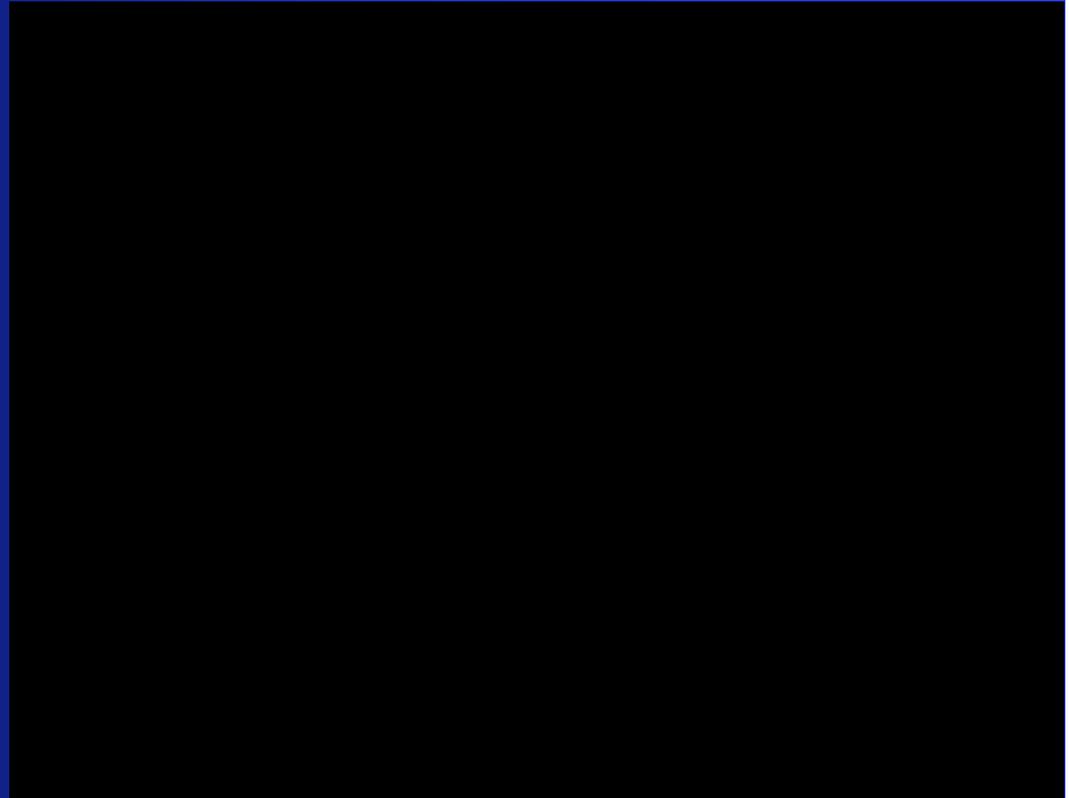
Callisto



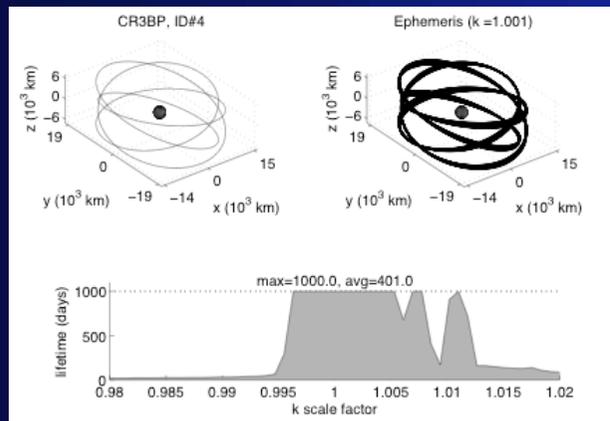
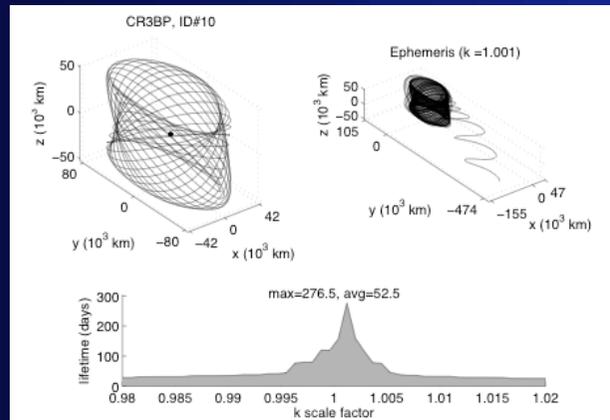
Ganymede



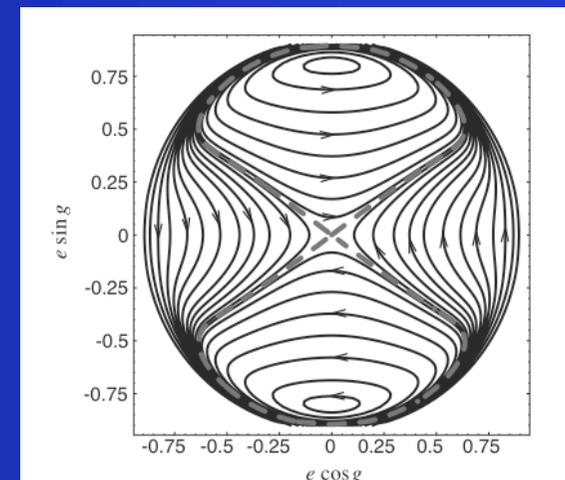
Europa



Europa: soluciones periódicas y analíticas



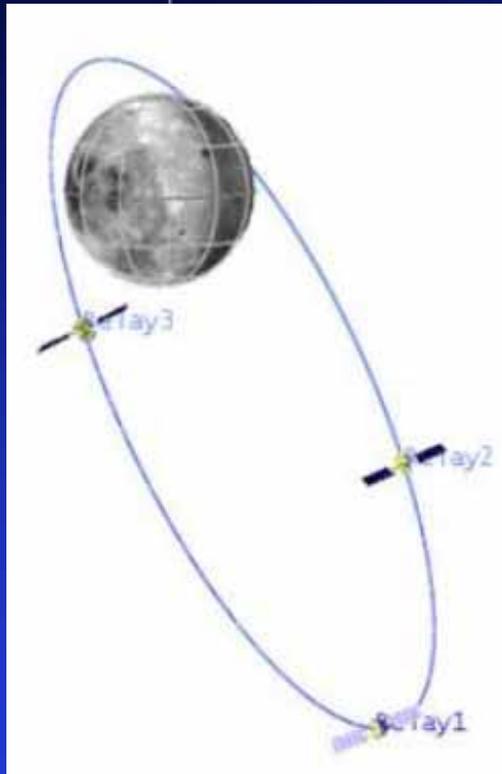
Gravitación de Europa y Júpiter,
achatamiento de Europa



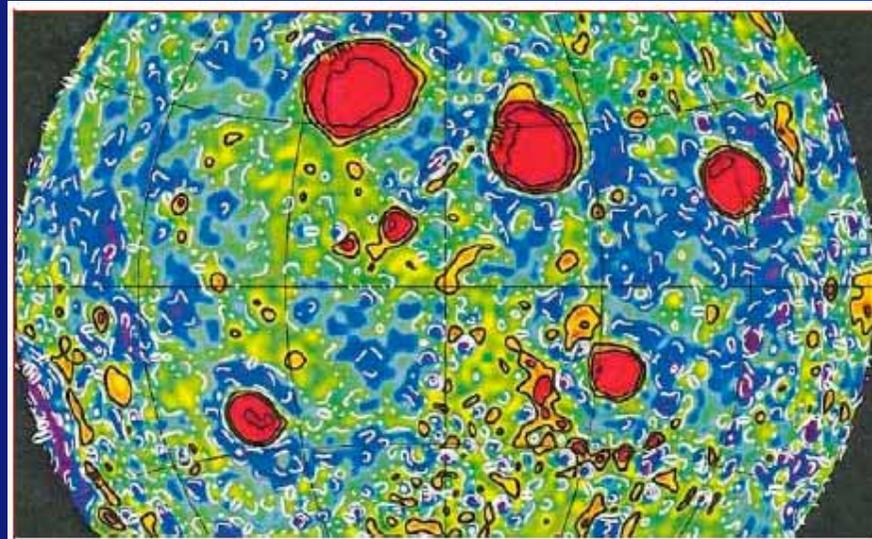
$$I = I'' + \varepsilon \frac{3}{40} (5 + 6\beta^2) \sin I''$$

$$g = g'' - \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{e} \left(2 - \frac{4}{5} \beta^2 \right) + \frac{15}{8} \cos I'' \right] \sin 2g''$$

de nuevo a la Luna...



GPS en la Luna
con 3 satélites



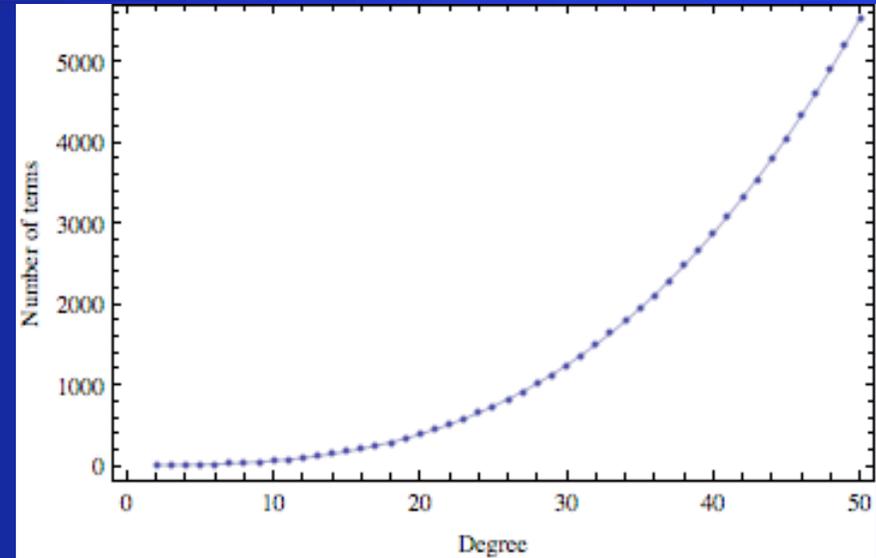
Se muestran en rojo-naranja los **mascons** en la Luna, que hacen tan irregular su campo gravitacional. Los cinco más grandes corresponden a los mayores cráteres llenos de lava o "mares".

Luna: teoría analítica

Lara & Ferrer, AAS 09, Savannah Georgia

$$R_m = \frac{Gm}{r} \sum_{j \geq 2} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^j C_{j,0} P_{j,0}(\sin \varphi)$$

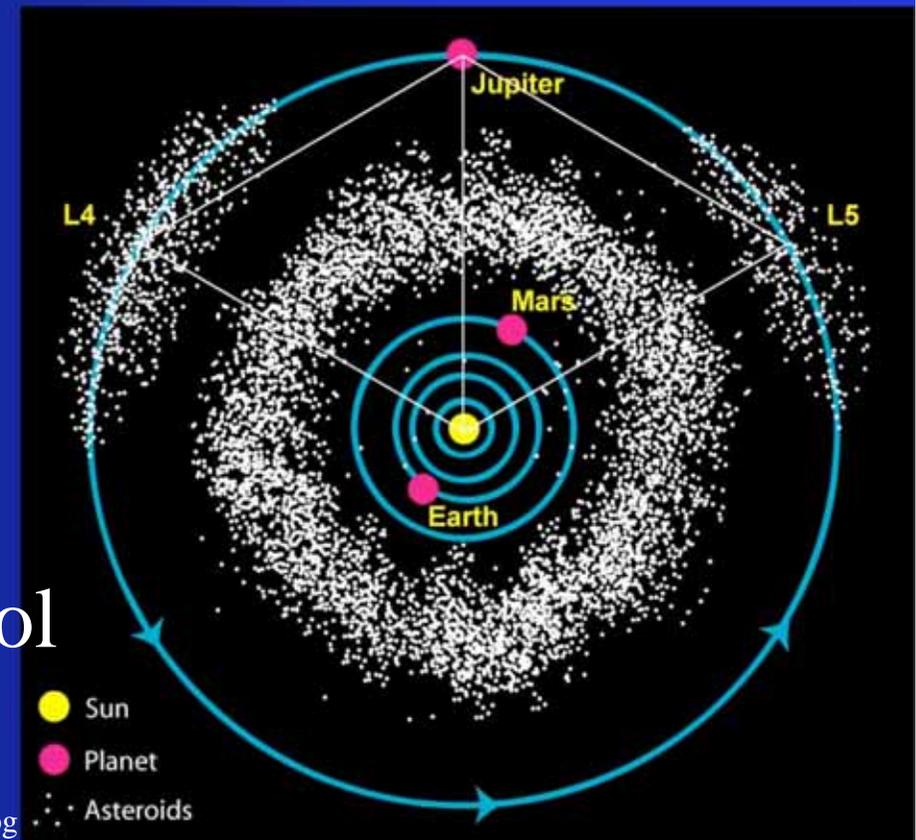
$$\pm R \left(-\frac{Gm}{2a}\right) J_k \left(\frac{\alpha}{a}\right)^k \frac{e^j}{\eta^{2k-1}} \begin{cases} \sin(2l+1)g & k \text{ odd} \\ \cos 2lg & k \text{ even} \end{cases}$$



- N° de términos crece con el grado del potencial
 - Crecimiento cúbico
- Consideramos 50 zonales
 - Manipulación simbólica requiere decenas de Mbytes
 - Teoría se almacena en 2,5 Megas (*Mathematica*)

Ejemplo: misiones a asteroides

- Interés
 - Orígenes sistema solar
 - Riqueza mineral
- Cinturón principal
 - Entre 2 y 4 UA
- Troyanos
 - $\pm 60^\circ$ órbita Júpiter
- NEOs: <1.3 UA del sol

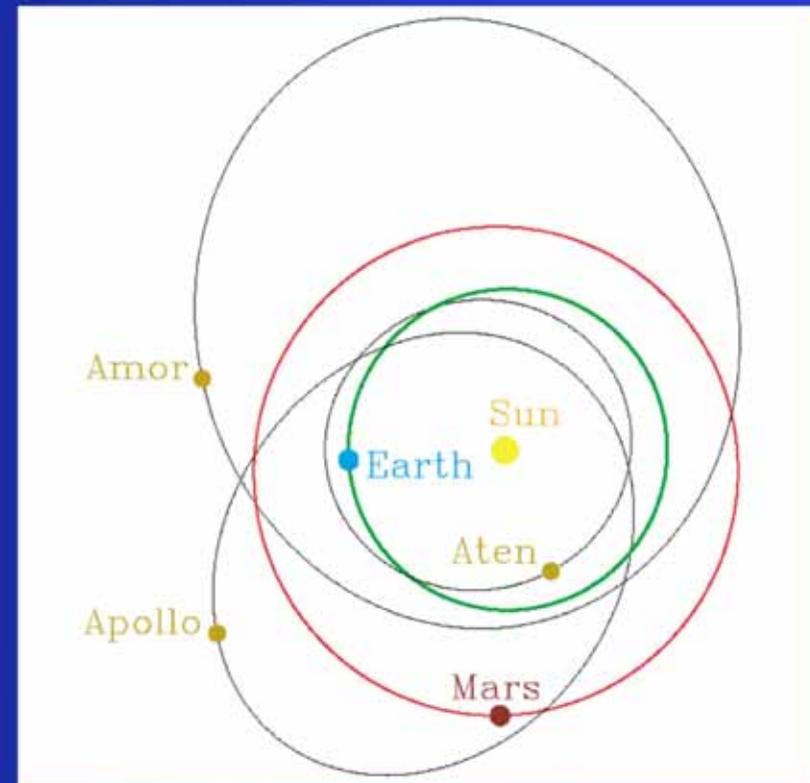


Asteroides desde La Murta

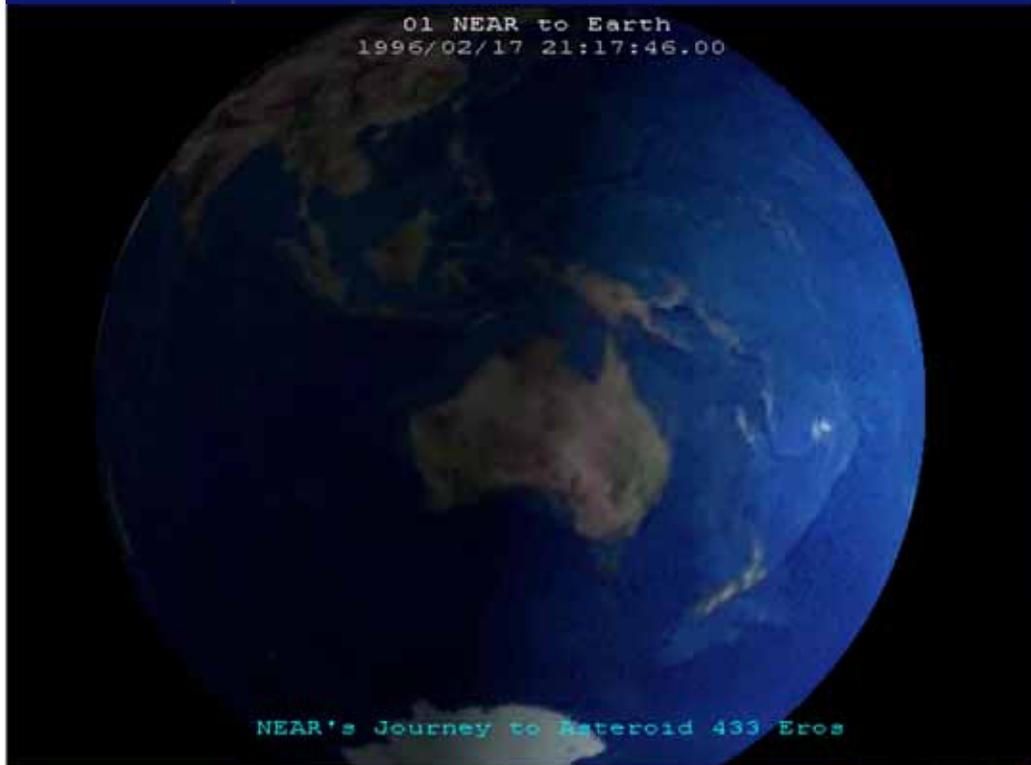


NEOs

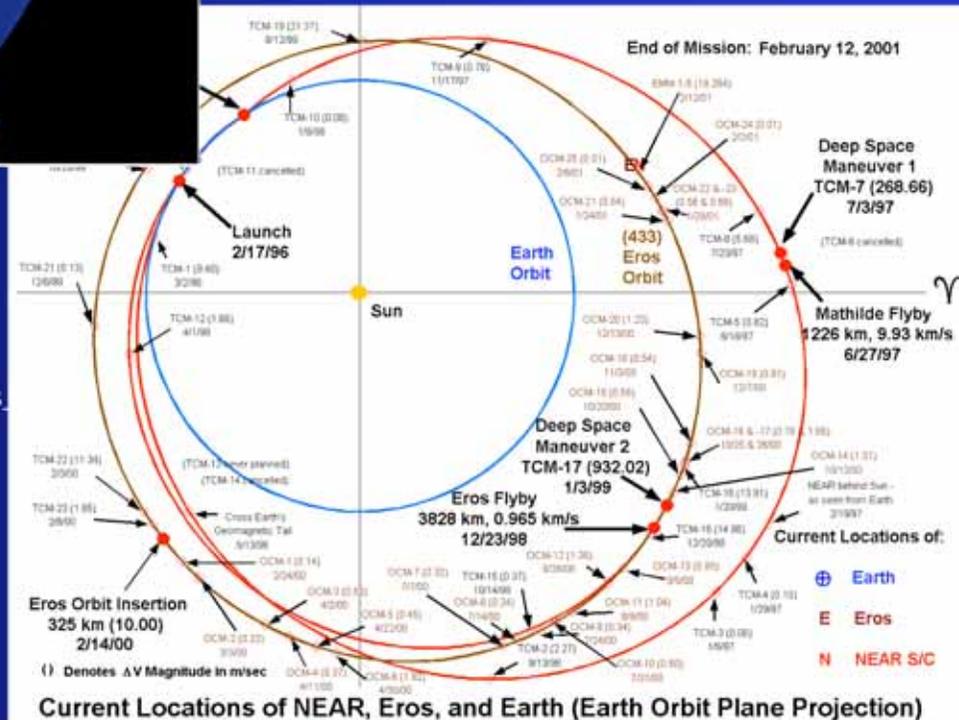
- Asteroides y cometas
 - $1000 > 1\text{km}$
- Órbitas cerca la Tierra
 - Peligrosos:
 - $> 150\text{ m}$ y $< 7,5\text{ Mkm}$
- Localizarlos
- Calcular su trayectoria
- ¿Interceptarlos?



Misión NEAR a Eros



http://near.jhuapl.edu/NewMissionDesign/launch_to_eros

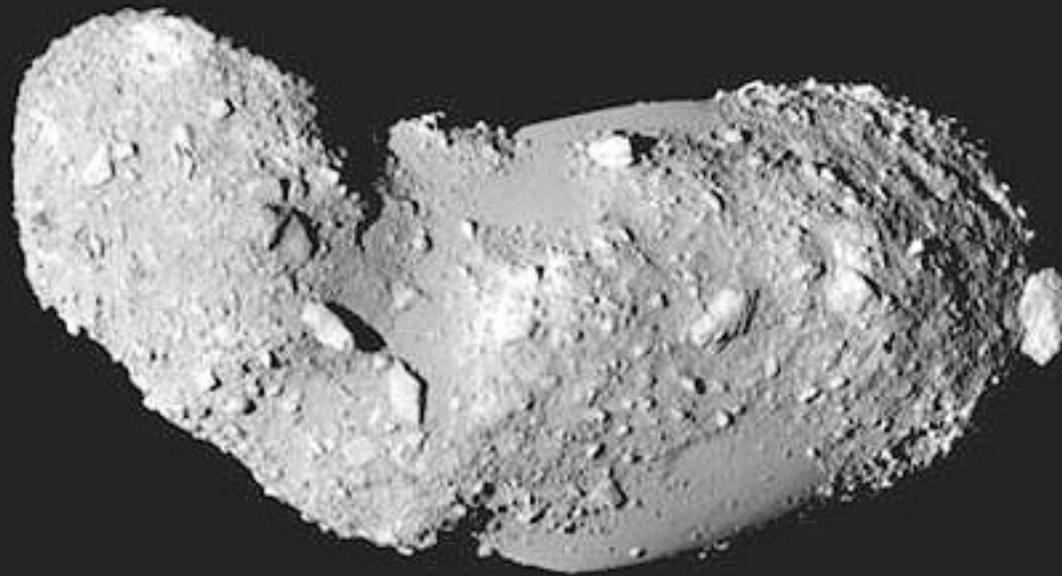




Movimiento roto-traslatorio

Daniel Scheeres model

Asteroid Itokawa vs ISS



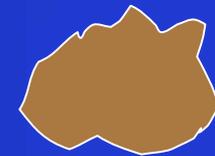
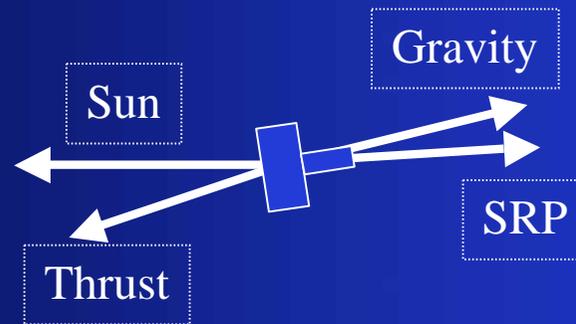
540 m



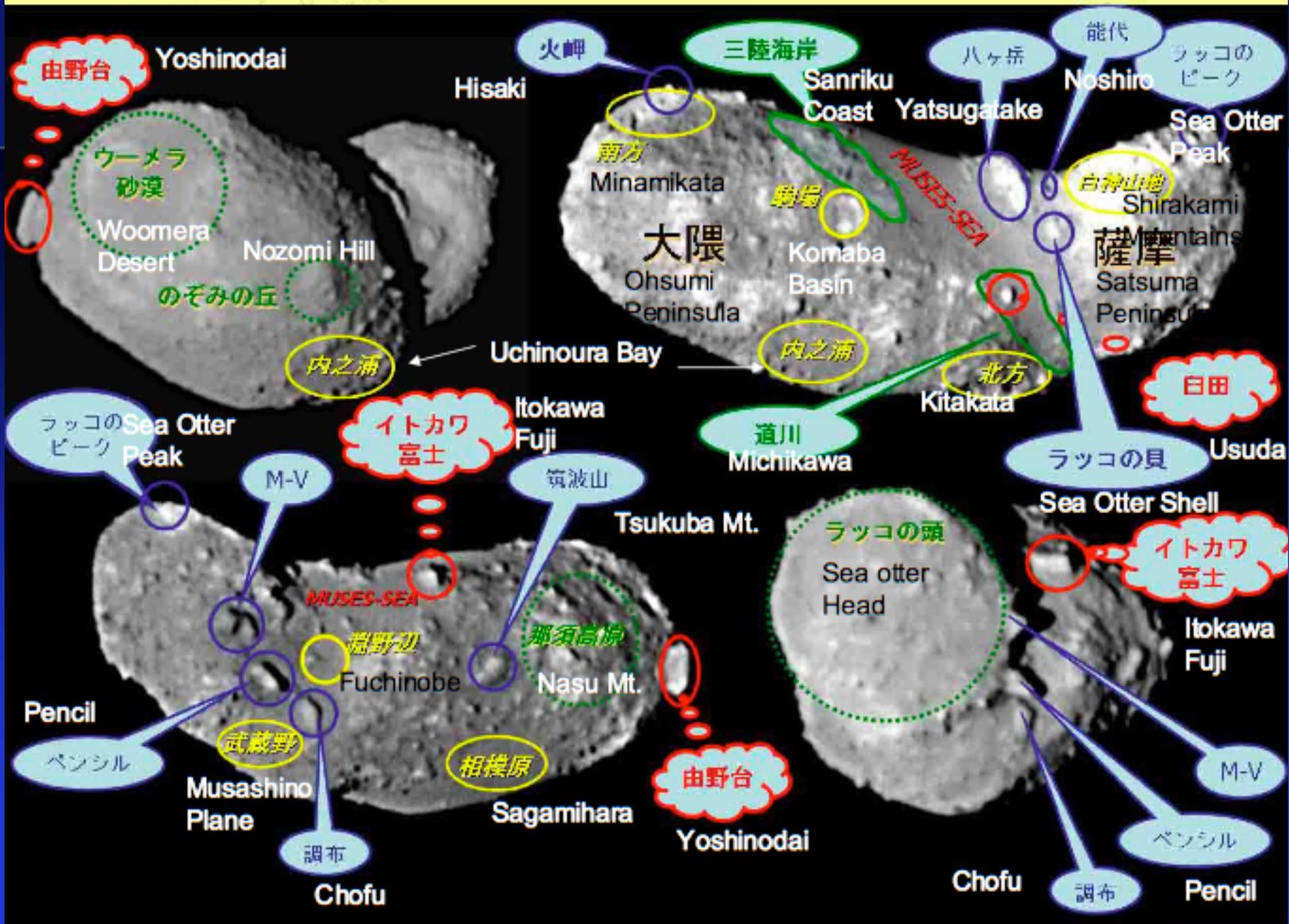
80 m

COPYRIGHT 2006 PASCAL LEE
JAXA and NASA

Inertial Hovering



イトカワ地名候補



2005-10-19T21:45 (UTC)
distance: 3.8 km

Release 051101-17 ISAS/JAXA

—
10 m

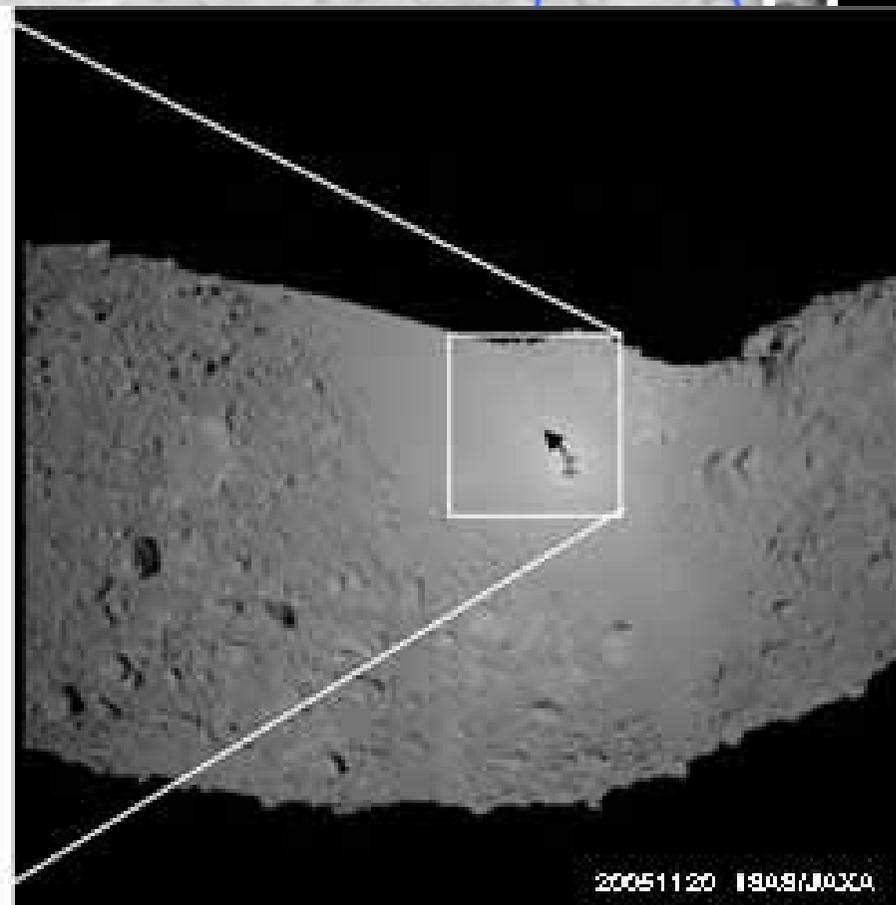
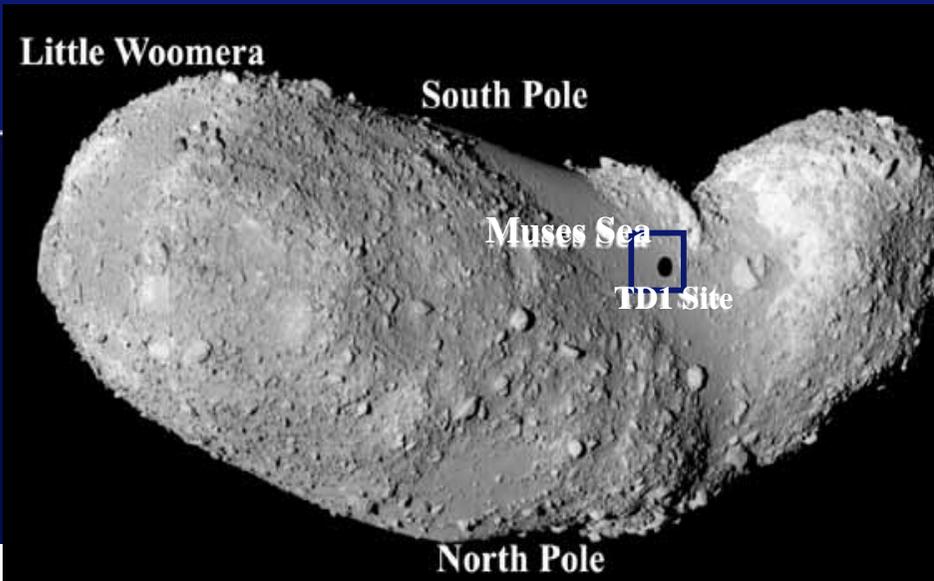
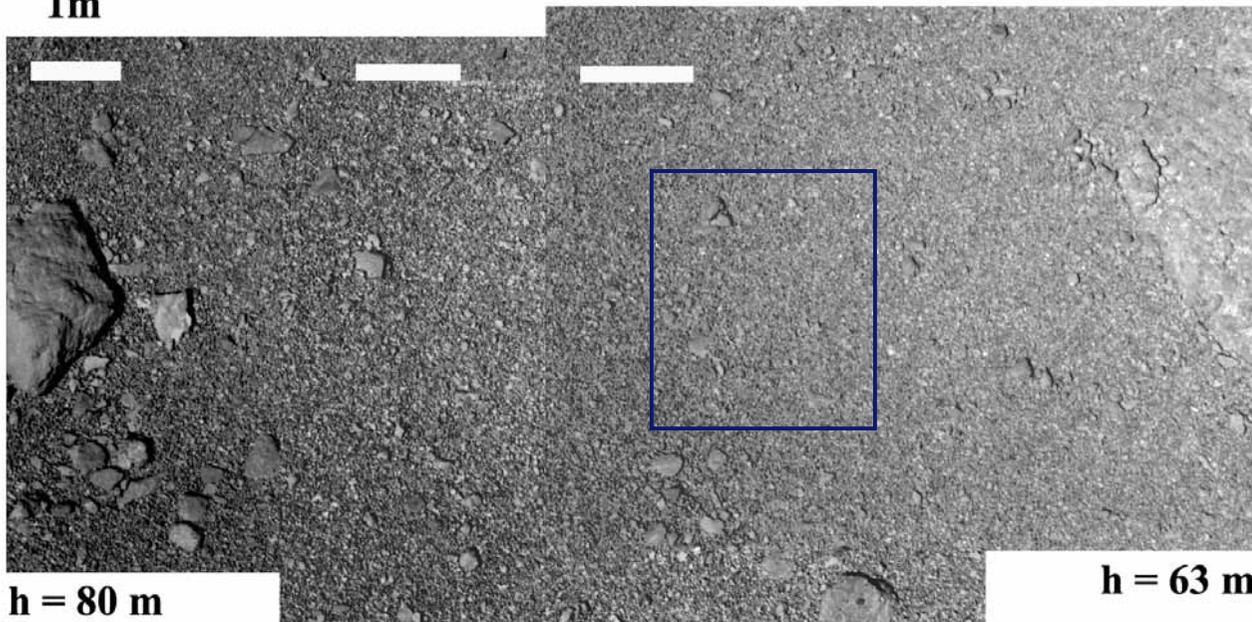


図12 Woomera 域: 着陸・試料採取候補点 B、盆地状地形、大岩塊



1m



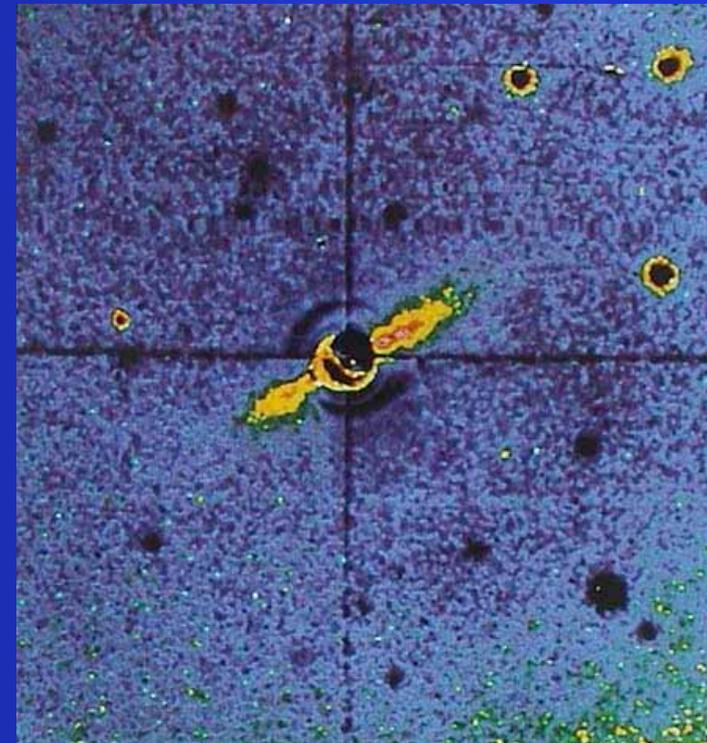
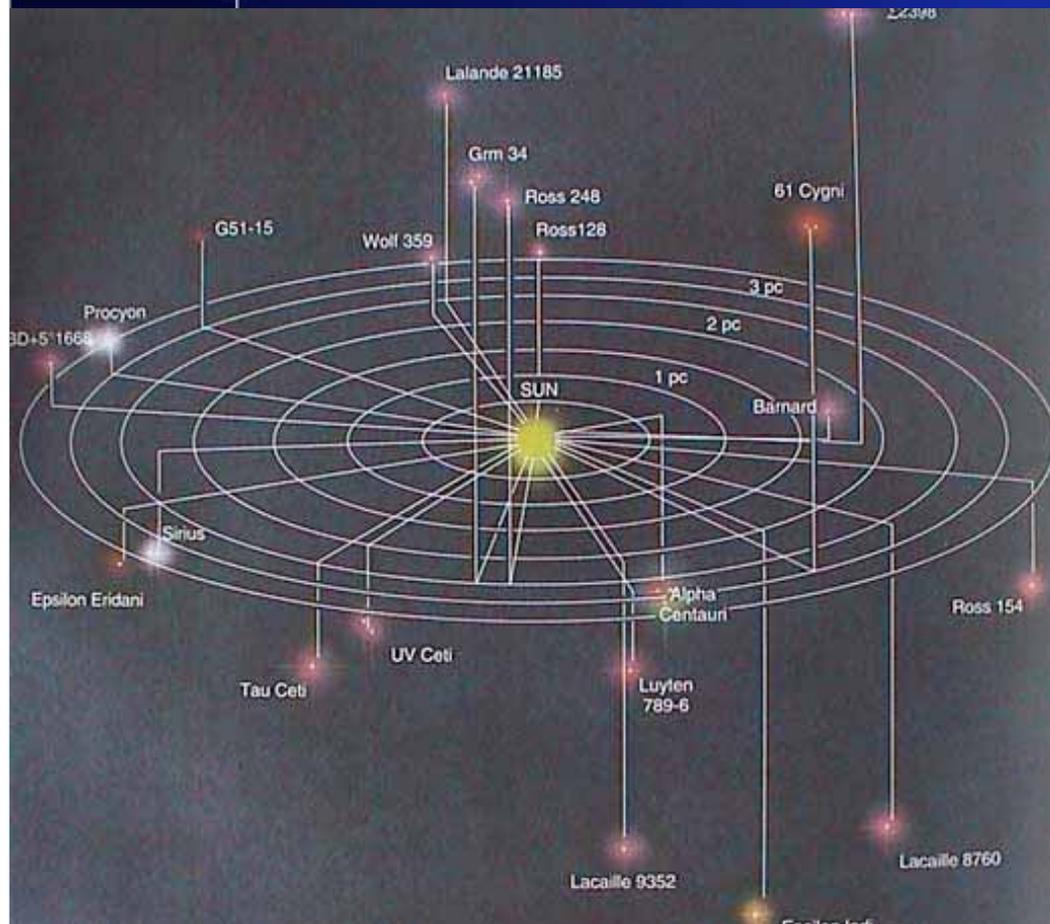
$h = 80 \text{ m}$

$h = 68 \text{ m}$

$h = 63 \text{ m}$



buscando sistemas planetarios en las proximidades del sol

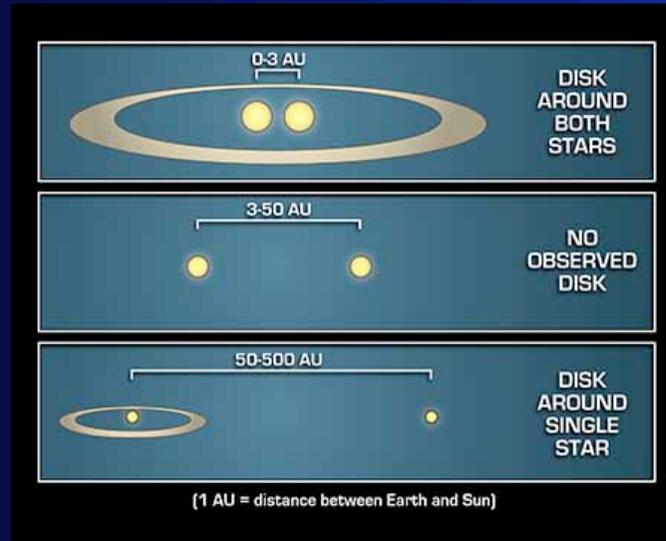


ya se han descubierto más de 347

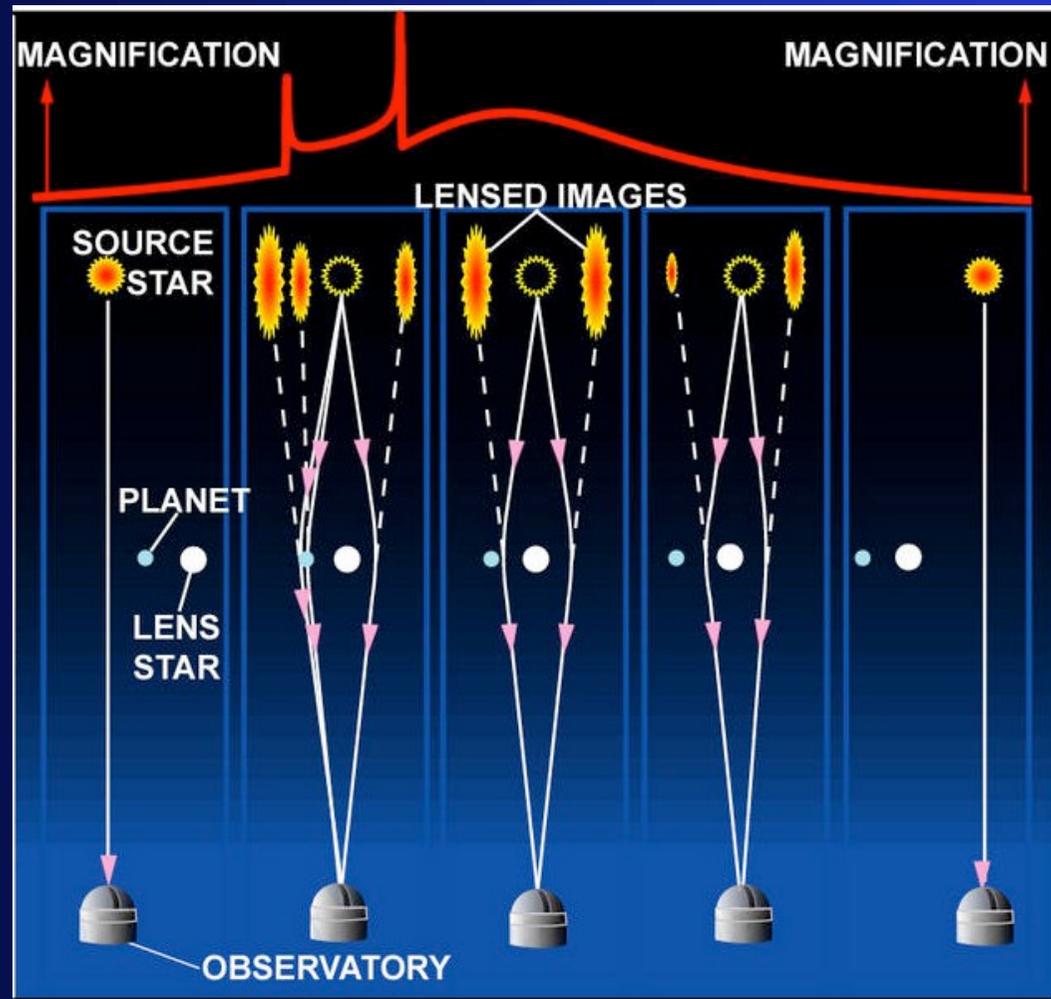
Evidencia de sistemas planetarios en torno a dos soles



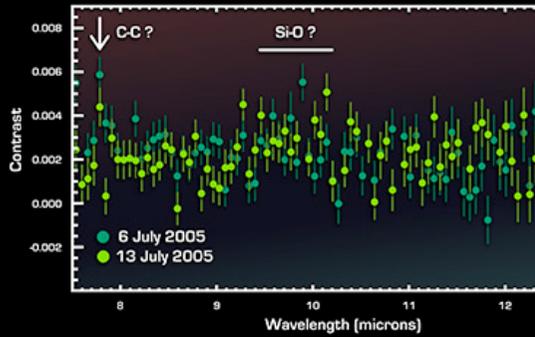
Image Credit: Lucasfilm Ltd. & TM. All rights reserved.



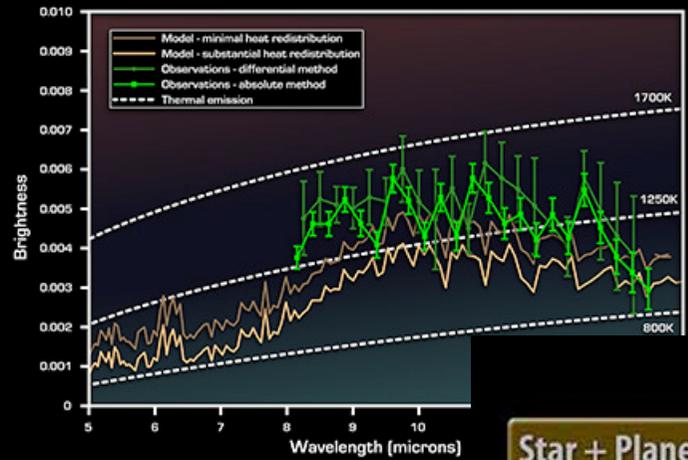
Micro lente gravitacional



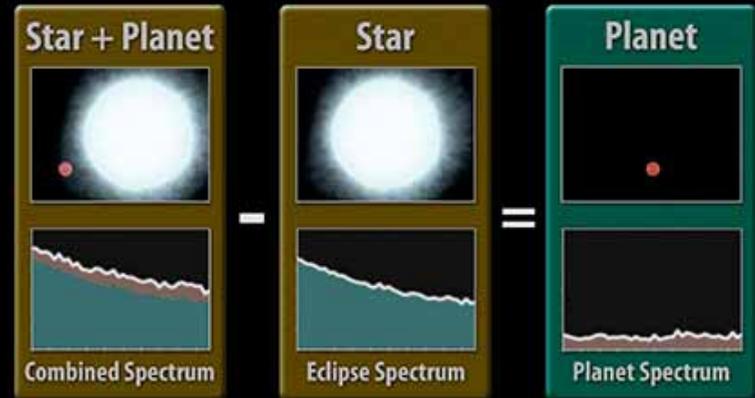
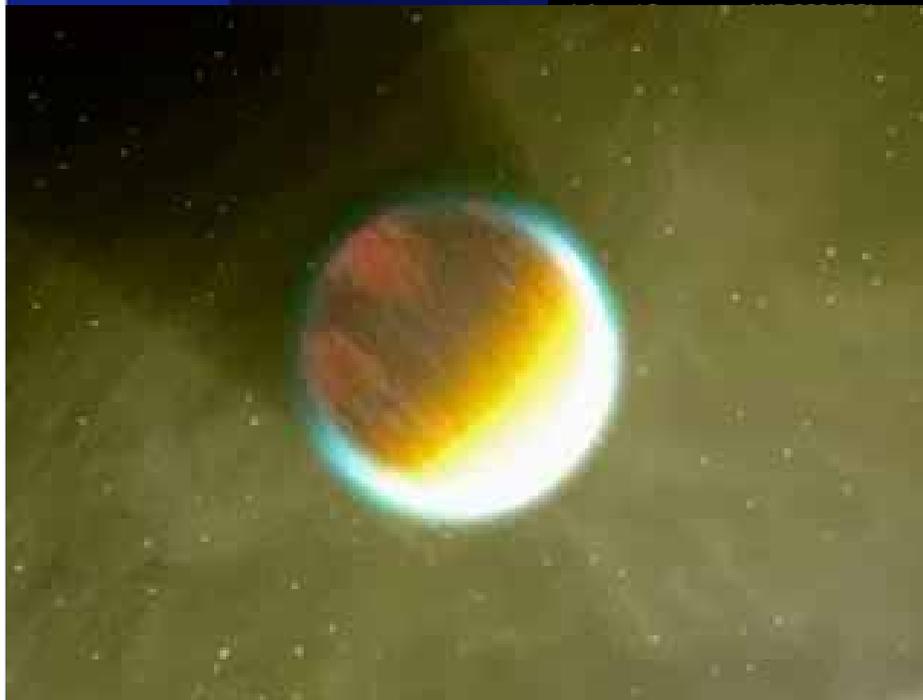
Estudiando la atmósfera de "hot Jupiter" HD 209458b



Infrared Spectrum of HD 209458b
NASA / JPL-Caltech / J. Richardson (Goddard Space Flight Center) Spitzer Space Tele

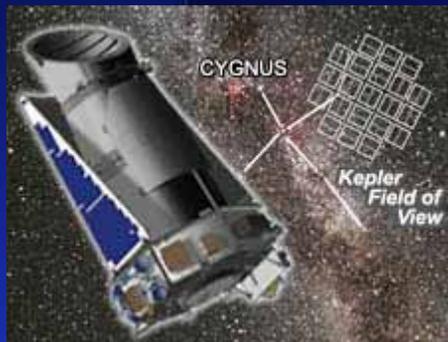
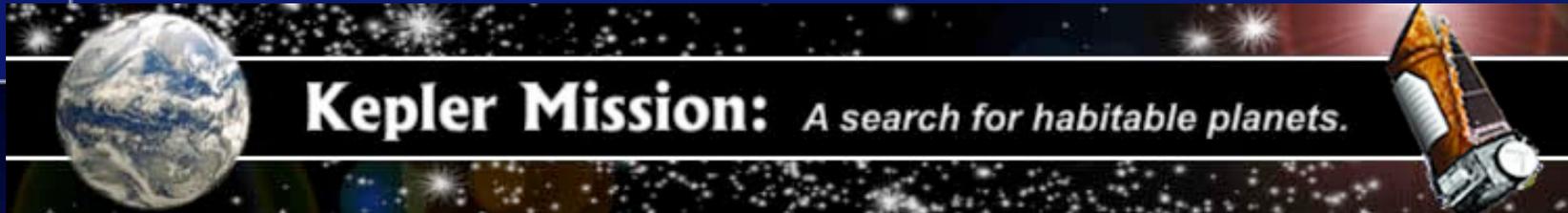


Spitz



Isolating a Planet's Spectrum

La misión Kepler



Kepler spacecraft is already searching for other Earth-like worlds. The mission, launched on March 6, will spend the next three-and-a-half years staring at more than 100,000 stars for telltale signs of planets.



The Transit Method of Detecting Extrasolar Planets

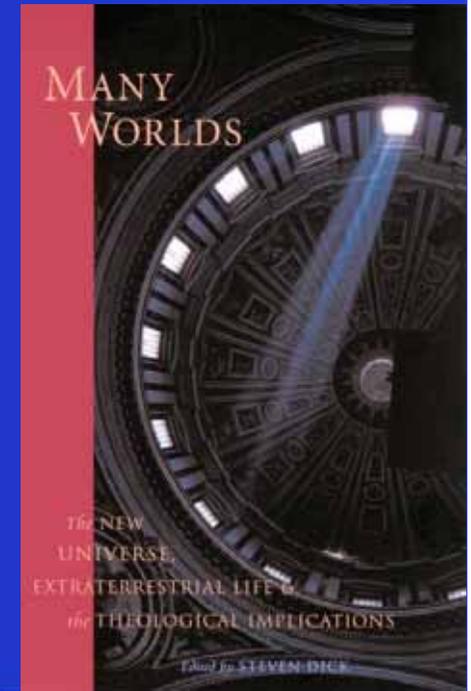


¿Muchos mundos? diversas opiniones...

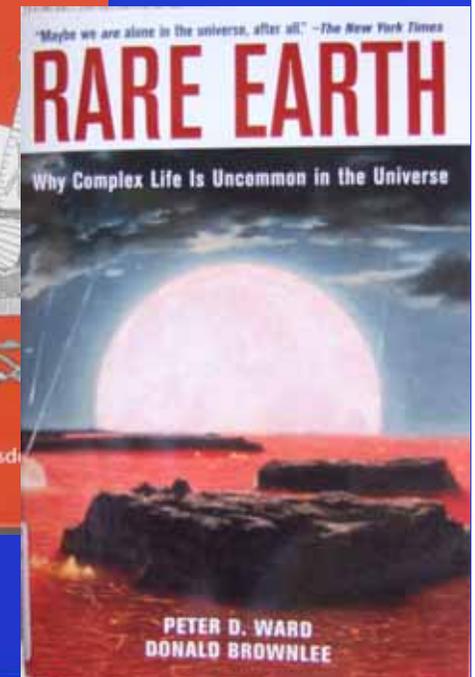
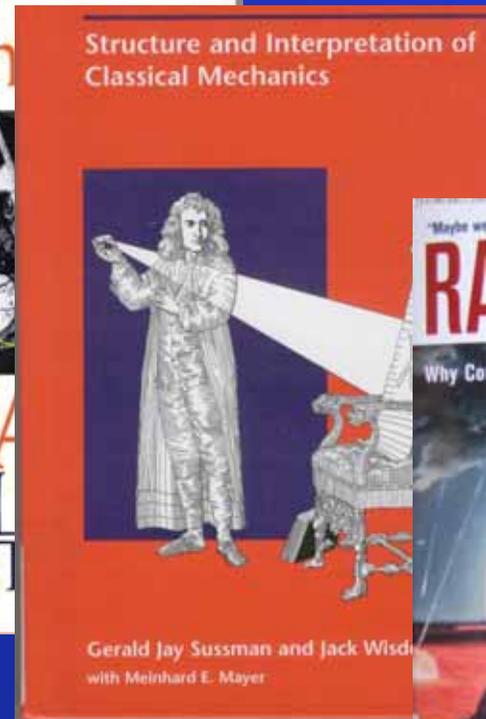
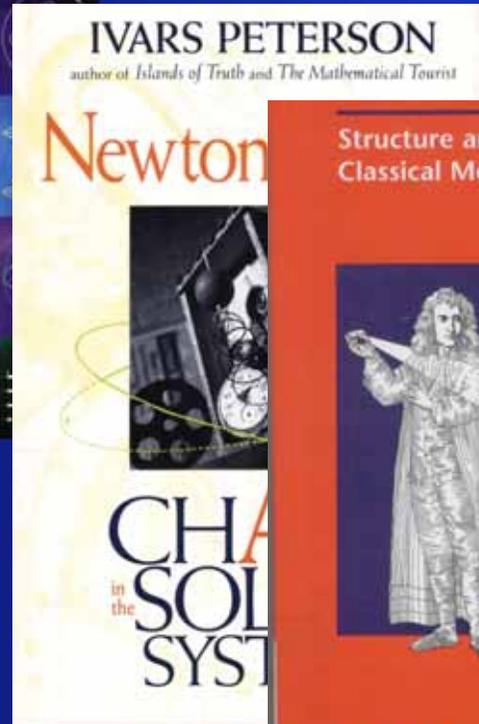
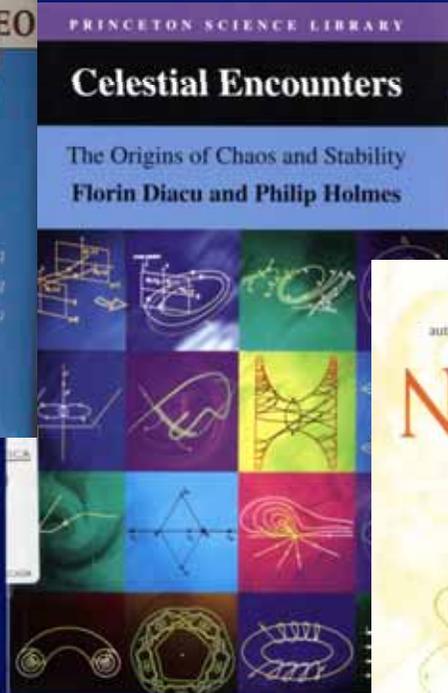
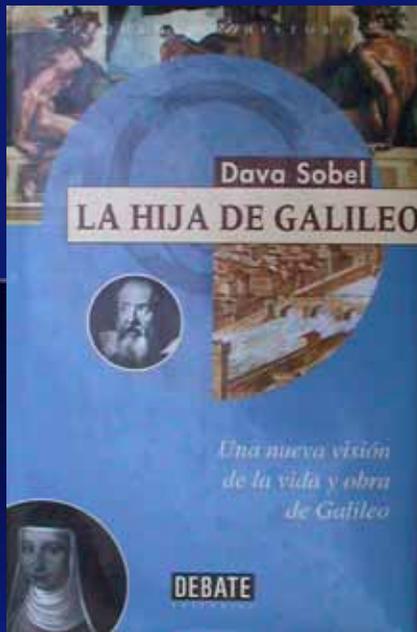
La postura de **Carl Sagan** de que la vida inteligente está bastante extendida, debe ser confrontada con la famosa cuestión puesta por el gran físico **Enrico Fermi**:

“Por qué no están aquí los extraterrestres?”

¿Por qué no han mostrado su existencia sin ningún margen de duda?



Algunas lecturas



Conferencia:

"Universe and Life on Earth"

Dr. Toshio Fukushima

National Astronomical Observatory Japan



Subaru telescope, Hawaii



Mitaka Observatory

lugar:

Museo de la Ciencia y Agua

día y hora:

15 Junio, 8 tarde